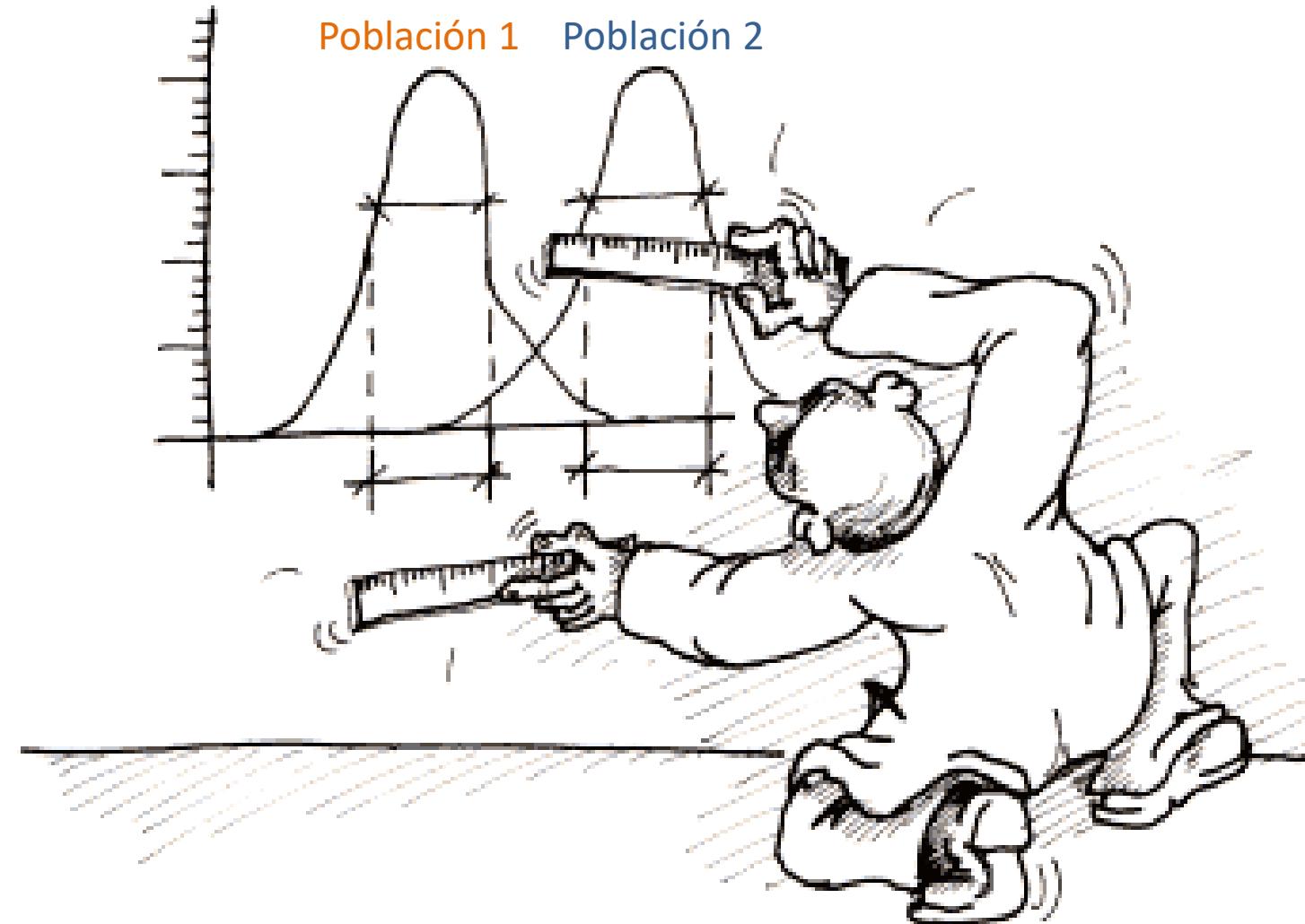


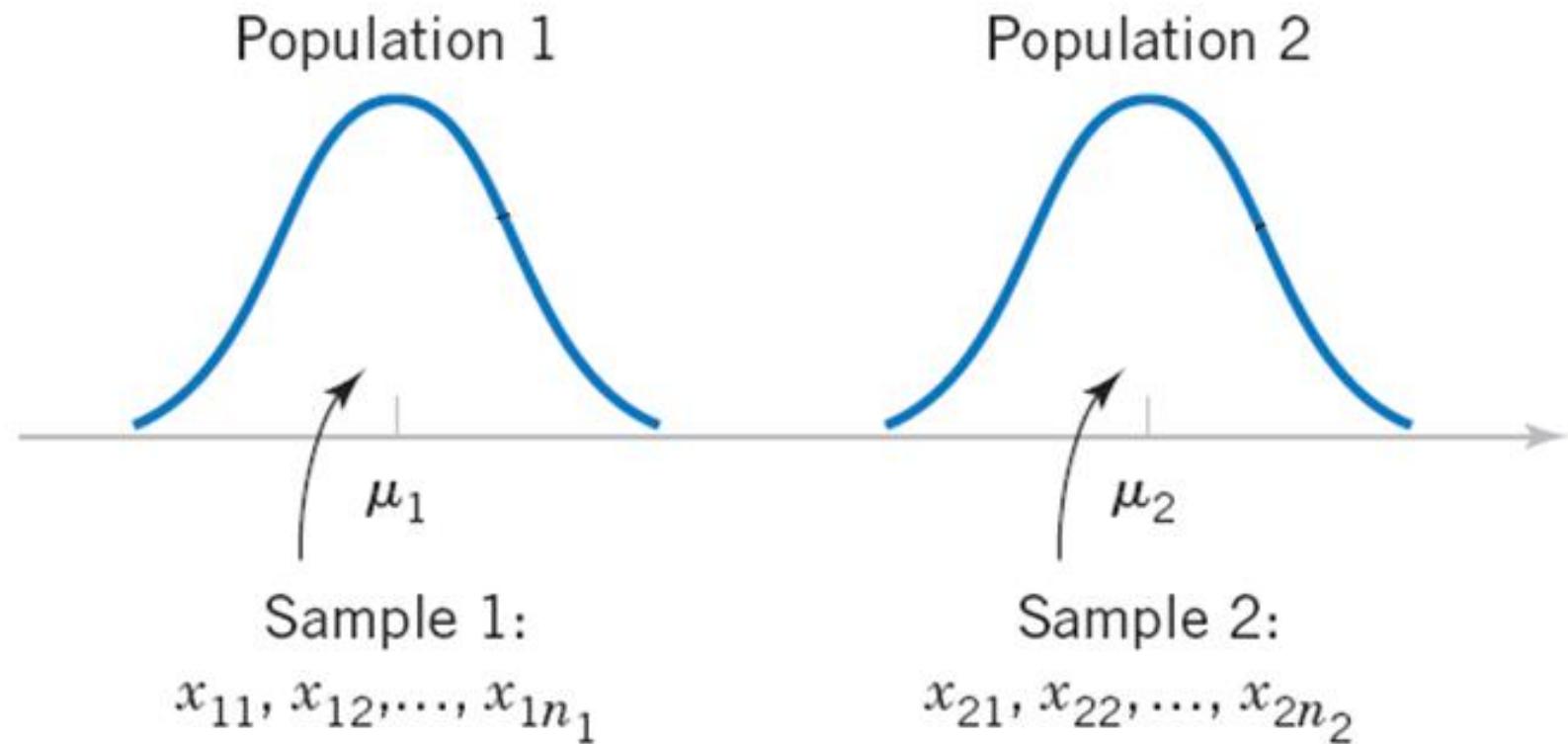
Clase 18: PH para el cociente de varianzas de poblaciones normales. PH para diferencia de medias de poblaciones normales.

Universidad Nacional de Colombia – sede Medellín

Comparación de varianzas de poblacionales normales



Prueba de hipótesis para diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$



Prueba de hipótesis para cociente de varianzas

Queremos probar:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

El estadístico está dado por:

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim f_{n_1-1, n_2-1}$$

valor-P

- Si $H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

$$\text{Valor - P} = \text{Prob}(F_{n_1-1, n_2-1} \leq f_0)$$

- Si $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$\text{Valor - P} = 2 \times \min\{\text{P}(F_{n_1-1, n_2-1} \leq f_0), \text{P}(F_{n_1-1, n_2-1} \geq f_0)\}$$

- Si $H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$$\text{Valor - P} = \text{Prob}(F_{n_1-1, n_2-1} \geq f_0)$$

Regiones de rechazo

- Si $H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Se rechaza H_0 si $f_0 < f_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$

- Si $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Se rechaza H_0 si $f_0 > f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ o si $f_0 < f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$

- Si $H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Se rechaza H_0 si $f_0 > f_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$

Equivalencia

$$\begin{array}{ccc} H_0: \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1 & \longleftrightarrow & H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_a: \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1 & & H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{array}$$

Ejemplo 1

Se realiza un estudio para comparar dos tratamientos que se aplicarán a frijoles crudos con el objetivo de reducir el tiempo de cocción. El tratamiento T1 es a base de bicarbonato de sodio, el T2 es a base de cloruro de sodio o sal común. La variable respuesta es el tiempo de cocción en minutos. Los datos se muestran en la tabla. **¿Son las varianzas de los tiempos iguales o diferentes?** Suponga que los datos se distribuyen normalmente y use $\alpha = 3\%$ para la prueba.

Tratamiento	Tiempo (min)						
T1	76	85	74	78	82	75	82
T2	57	67	55	64	61	63	63

Ejemplo 1

Tratamiento	Tiempo (min)						
T1	76	85	74	78	82	75	82
T2	57	67	55	64	61	63	63

T1: bicarbonato



T2: sal



Ejemplo 1

Paso 1. Definir las hipótesis.

$$H_0: \sigma_{T1}^2 = \sigma_{T2}^2$$

$$H_a: \sigma_{T1}^2 \neq \sigma_{T2}^2$$

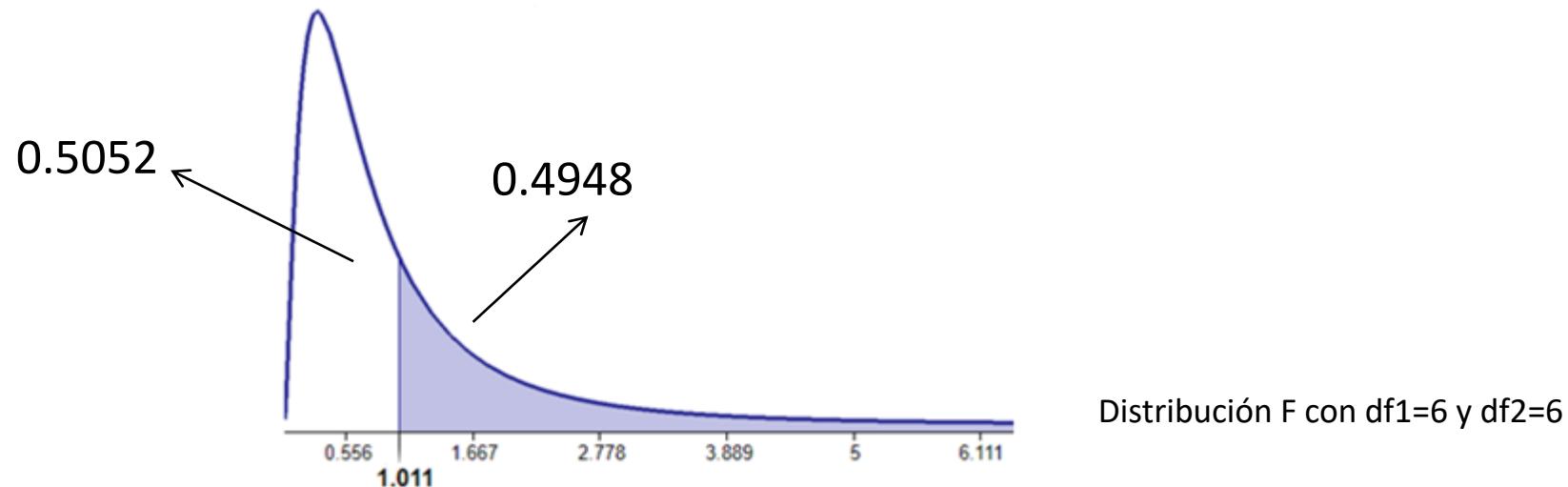
Paso 2. Calcular el estadístico

$$f_0 = \frac{s_{T1}^2}{s_{T2}^2} = \frac{17.47619}{17.28571} = 1.0111019$$

Ejemplo 1

Paso 3. Calcular el *valor-P*

En R pf (q=1.011, df1=6, df2=6, lower.tail=FALSE)



$$\text{Valor - P} = 2 \times \min\{\text{P}(f_{n_1-1, n_2-1} \leq f_0), \text{P}(f_{n_1-1, n_2-1} \geq f_0)\}$$

$$\text{Valor - P} = 2 \times \min\{0.5052, 0.4948\} = 2 \times 0.4948 = 0.9896$$

Ejemplo 1

Paso 4. Tomar decisión

Como el *valor-P* es 0.9896 no se puede rechazar la hipótesis nula y por lo tanto se concluye que las varianzas son iguales, es decir, no hay evidencias muestrales suficientes para pensar que no es cierto que $\sigma_{T1}^2 = \sigma_{T2}^2$.

Ejemplo 2

El arsénico en agua potable es un posible riesgo para la salud. Un artículo reciente reportó concentraciones de arsénico en agua potable en partes por billón (ppb) para 10 comunidades urbanas y 10 comunidades rurales. Los datos son los siguientes:

Urbana: 3, 7, 25, 10, 15, 6, 12, 25, 15, 7

Rural: 48, 44, 40, 38, 33, 21, 20, 12, 1, 18

¿Son las varianzas de los tiempos iguales o diferentes? Suponga que los datos se distribuyen normalmente y use $\alpha = 7\%$ para la prueba.

Ejemplo 2

Urbana: 3, 7, 25, 10, 15, 6, 12, 25, 15, 7

Rural: 48, 44, 40, 38, 33, 21, 20, 12, 1, 18



Ejemplo 2

Paso 1. Definir las hipótesis

$$H_0: \sigma_{Urb}^2 = \sigma_{Rur}^2$$

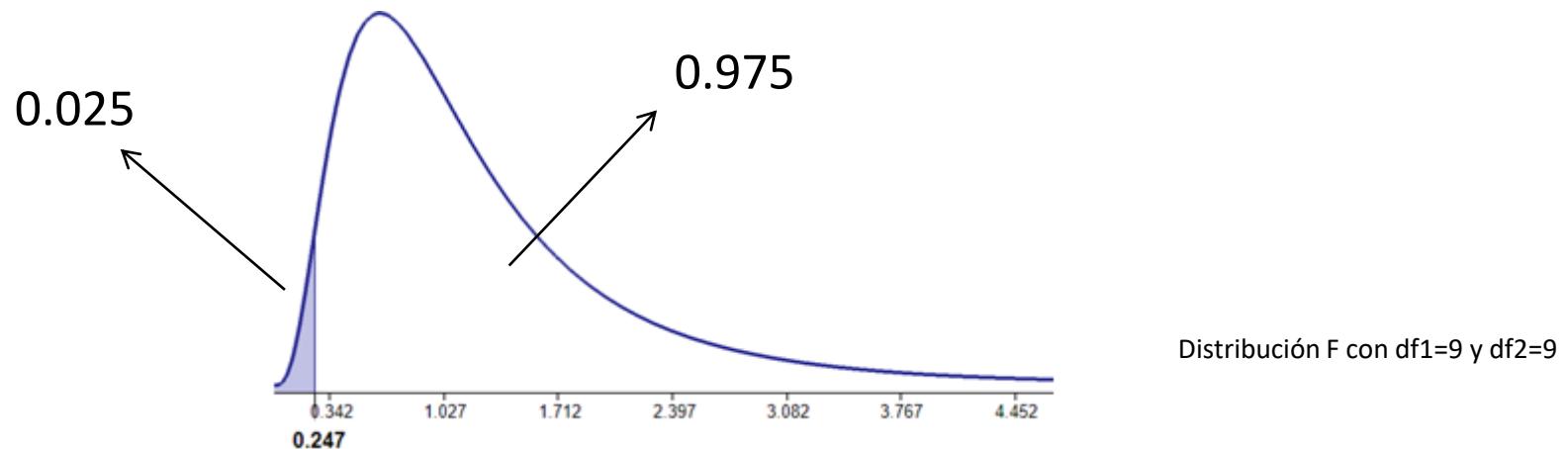
$$H_a: \sigma_{Urb}^2 \neq \sigma_{Rur}^2$$

Paso 2. Calcular el estadístico

$$f_0 = \frac{s_{Urb}^2}{s_{Rur}^2} = 0.2473473$$

Ejemplo 2

Paso 3. Calcular el *valor-P*



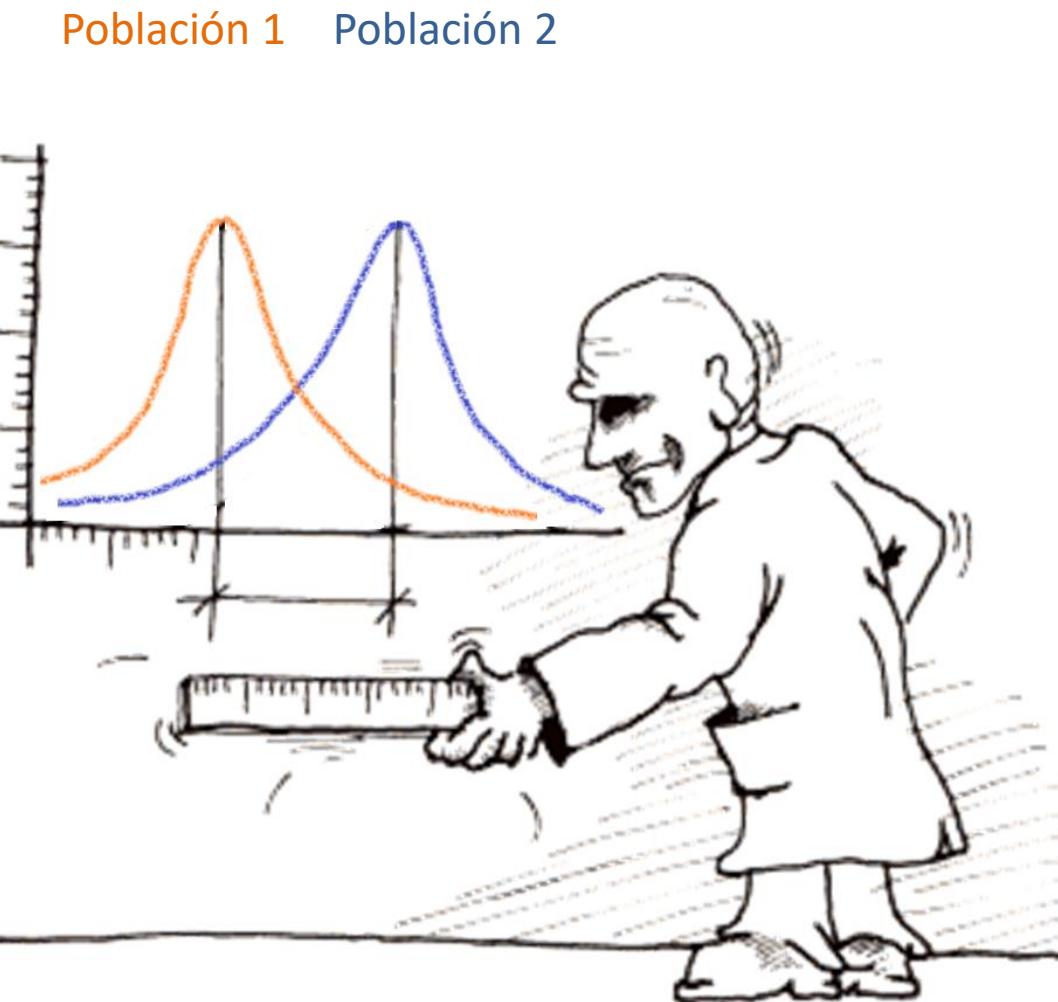
$$\text{Valor - P} = 2 \times \min\{\text{P}(f_{n_1-1, n_2-1} \leq f_0), \text{P}(f_{n_1-1, n_2-1} \geq f_0)\}$$

$$\text{Valor - P} = 2 \times \min\{0.025, 0.975\} = 2 \times 0.025 = 0.050$$

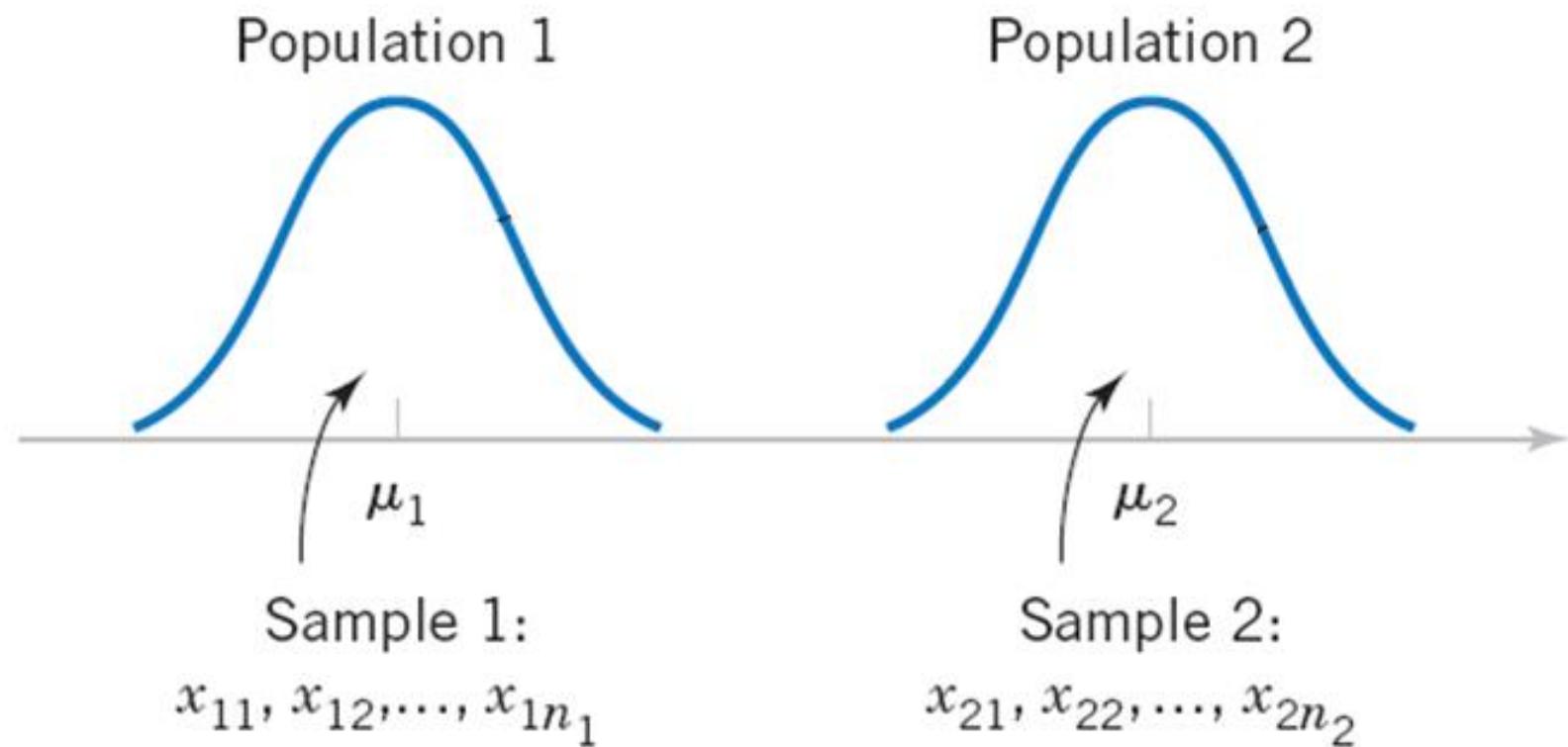
Ejemplo 2

Paso 4. Conclusión: como el *valor-P* es 0.05 y el nivel de significancia era 7%, se rechaza la hipótesis nula y por lo tanto se concluye que las varianzas son diferentes, es decir, hay evidencias muestrales suficientes para pensar que no es cierto que $\sigma_{Urb}^2 = \sigma_{Rur}^2$.

Comparación de medias de poblacionales normales



Prueba de hipótesis para diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$



Caso 1: PH para diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ con poblaciones normales y varianzas pob. iguales

Se quiere estudiar:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$$

El estadístico está dado por:

$$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

donde $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ y $t_0 \sim t_{n_1+n_2-2}$

Two simple t-Test

valor-P

- Si $H_a: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$

$$\text{Valor - P} = \text{Prob}(t_{n_1+n_2-2} \leq t_0)$$

- Si $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$

$$\text{Valor - P} = 2 \times \text{Prob}(t_{n_1+n_2-2} \geq |t_0|)$$

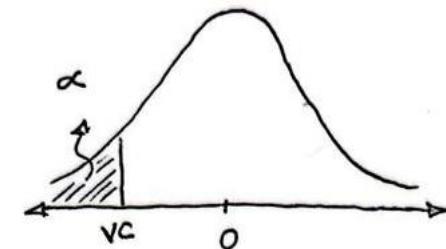
- Si $H_a: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$

$$\text{Valor - P} = \text{Prob}(t_{n_1+n_2-2} \geq t_0)$$

Regiones de rechazo

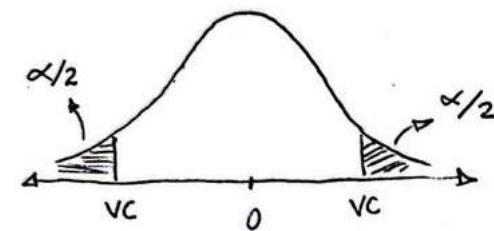
- Si $H_a: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$

Se rechaza H_0 si $t_0 < -t_{\alpha, n_1 + n_2 - 2}$



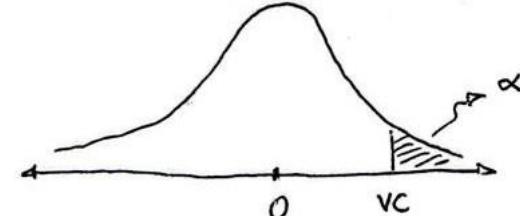
- Si $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$

Se rechaza H_0 si $|t_0| > t_{\alpha/2, n_1 + n_2 - 2}$



- Si $H_a: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$

Se rechaza H_0 si $t_0 > t_{\alpha, n_1 + n_2 - 2}$



Ejemplo

Se realiza un estudio para comparar dos tratamientos que se aplicarán a frijoles crudos con el objetivo de reducir el tiempo de cocción. El tratamiento T1 es a base de bicarbonato de sodio, el T2 es a base de cloruro de sodio o sal común. La variable respuesta es el tiempo de cocción en minutos. Los datos se muestran en la tabla.

¿Son las medias poblacionales de los tiempos iguales o diferentes?
Suponga que los datos se distribuyen normalmente y use $\alpha = 3\%$ para la prueba.

Nota: de un ejemplo anterior se sabe que los datos provienen de poblaciones normales con varianzas iguales.

Ejemplo

Tratamiento	Tiempo (min)						
T1	76	85	74	78	82	75	82
T2	57	67	55	64	61	63	63

T1: bicarbonato



T2: sal



Ejemplo

¿Existen diferencias significativas entre los tiempos de cocción promedio de los fríjoles con T1 y T2?

T1: bicarbonato

78.86 min



Tiempos promedios

61.43 min



T2: sal

Ejemplo

Paso 1. Definir las hipótesis de interés

$$H_0: \mu_{T1} - \mu_{T2} = 0$$

$$H_a: \mu_{T1} - \mu_{T2} \neq 0$$

T1: bicarbonato



T2: sal



Ejemplo

Paso 2. Definir el nivel de confianza, $\alpha = 3\%$

Paso 3. Calcular los estadísticos muestrales

Para tratamiento T1

$$\bar{x}_1 = 78.86$$

$$s_1^2 = 17.48$$

$$n_1 = 7$$

Para tratamiento T2

$$\bar{x}_2 = 61.43$$

$$s_2^2 = 17.29$$

$$n_2 = 7$$

Ejemplo

Paso 4. Calcular el valor de S_p^2

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(7 - 1)17.48 + (7 - 1)17.29}{7 + 7 - 2} = 17.39$$

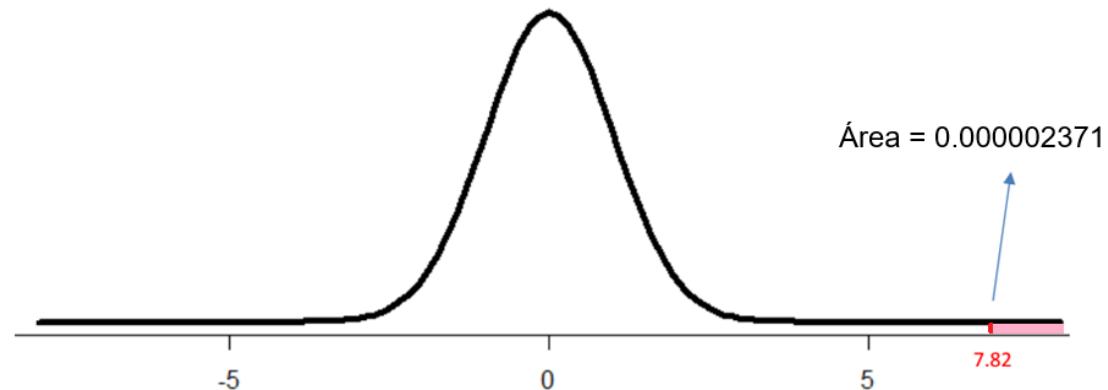
Así el estadístico es

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{78.86 - 61.43 - 0}{4.17 \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}}} = 7.82$$

Ejemplo

Paso 5. Calcular el Valor-P

Como $t_0 = 7.82$ se busca el área a la derecha de una t -student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad, es decir, con 12 grados de libertad. En R `pt(q=7.82, df=12, lower.tail=FALSE)`



$$\text{Valor - P} = 2 \times 0.000002371 = 0.00000474264$$

Ejemplo

Paso 5. Conclusión:

- Como el $ValorP < 0.0010$ y $\alpha = 3\%$, entonces se concluye que se puede rechazar la hipótesis nula.
- En otras palabras, hay evidencia de que los tiempo promedios de cocción no son iguales.
- Como $\bar{x}_1 = 78.86$ y $\bar{x}_2 = 61.43$ entonces se puede afirmar que los frijoles remojados en el tratamiento 2 tienen tiempos de cocción menores.

Caso 2: PH para diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ con poblaciones normales y varianzas pob. diferentes

Se quiere estudiar

$$\begin{aligned} H_0: \mu_1 - \mu_2 &= \delta_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 &< \delta_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0: \mu_1 - \mu_2 &= \delta_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 &\neq \delta_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0: \mu_1 - \mu_2 &= \delta_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 &> \delta_0 \end{aligned}$$

El estadístico es

$$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

Welch's two simple t-Test

y se tiene que $t_0 \sim t_\nu$, donde ν se calcula así:

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

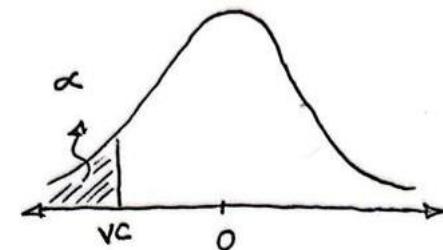
valor-P

- Si $H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$
Valor – P = Prob($t_v \leq t_0$)
- Si $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$
Valor – P = $2 \times \text{Prob}(t_v \geq |t_0|)$
- Si $H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$
Valor – P = Prob($t_v \geq t_0$)

Regiones de rechazo

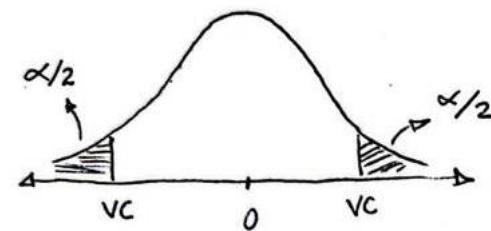
- Si $H_a: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$

Se rechaza H_0 si $t_0 < -t_{\alpha, v}$



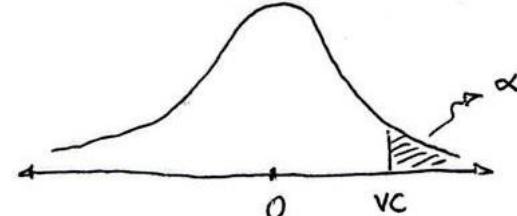
- Si $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$

Se rechaza H_0 si $|t_0| > t_{\alpha/2, v}$



- Si $H_a: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$

Se rechaza H_0 si $t_0 > t_{\alpha, v}$



Ejemplo

El arsénico en agua potable es un posible riesgo para la salud. Un artículo reciente reportó concentraciones de arsénico en agua potable en partes por billón (ppb) para 10 comunidades urbanas y 10 comunidades rurales. Los datos son los siguientes:

Urbana: 3, 7, 25, 10, 15, 6, 12, 25, 15, 7

Rural: 48, 44, 40, 38, 33, 21, 20, 12, 1, 18

¿Son las medias poblacionales iguales o diferentes? Suponga que los datos se distribuyen normalmente y use $\alpha = 7\%$ para la prueba.

Nota: de un ejemplo anterior se sabe que los datos provienen de poblaciones normales con varianzas diferentes.

Ejemplo

¿Existen diferencias entre las concentraciones medias de arsénico de la zona rural y urbana?

Concentraciones promedio

Urbana: 12.5 ppb



Rural: 27.5 ppb



Ejemplo

Paso 1. Definir las hipótesis

$$H_0: \mu_{Urb} - \mu_{Rur} = 0$$

$$H_1: \mu_{Urb} - \mu_{Rur} \neq 0$$

Urbana



Rural



Ejemplo

Paso 2. Calcular el estadístico

De las muestras se tiene

Para urbana

$$\bar{x}_1 = 12.50$$

$$s_1^2 = 58.28$$

$$n_1 = 10$$

Para rural

$$\bar{x}_2 = 27.50$$

$$s_2^2 = 235.61$$

$$n_2 = 10$$

Ejemplo

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{12.5 - 27.5 - 0}{\sqrt{\frac{58.28}{10} + \frac{235.61}{10}}} = -2.77$$

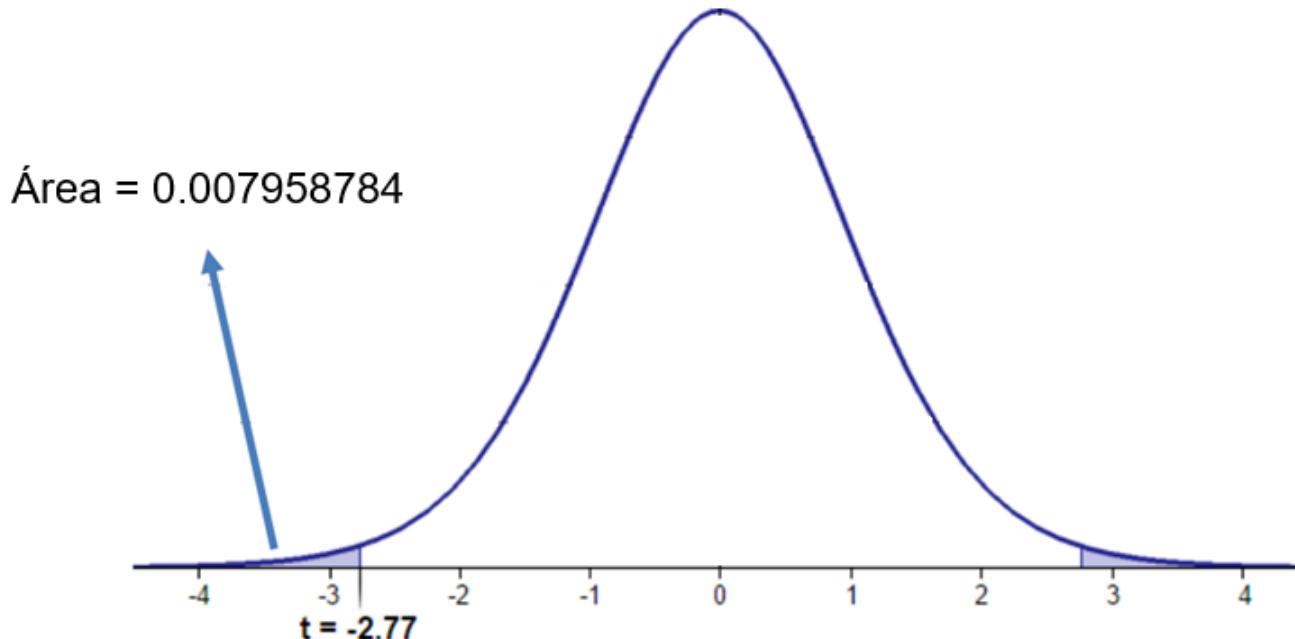
Los grados de libertad son:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 - 1}} \approx 13.2 = 13$$

Ejemplo

Paso 3. Calcular el *valor-P*.

En R `pt (q=-2.77, df=13, lower.tail=TRUE)`



Como la prueba es bilateral entonces $ValorP = 2 \times \text{Área} = 0.01591757$

Ejemplo

Paso 4. Tomar la decisión.

Como el *valor-P* es pequeño entonces se rechaza la hipótesis nula. En otras palabras, hay evidencias de que las concentraciones medias de arsénico son diferentes.

Caso 3: Prueba de hipótesis para diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ con poblaciones normales, varianzas conocidas

Se quiere estudiar:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$$

El estadístico está dado por:

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

donde $Z_0 \sim N(0, 1)$.