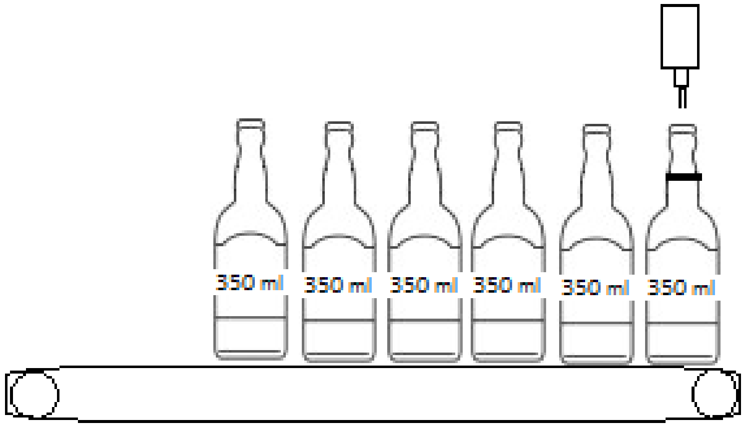
Clase 17: Procedimientos de pruebas de hipótesis, tipos de errores y valor P. Pruebas de hipótesis para medias con poblaciones normales y no normales

Universidad Nacional de Colombia – sede Medellín

Motivación 1

Proceso de llenado de cervezas de 350 ml

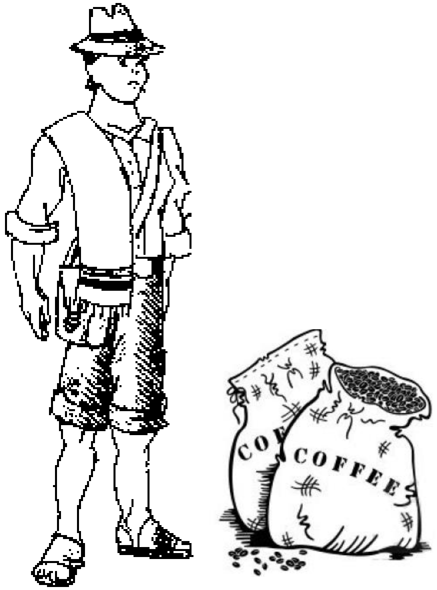


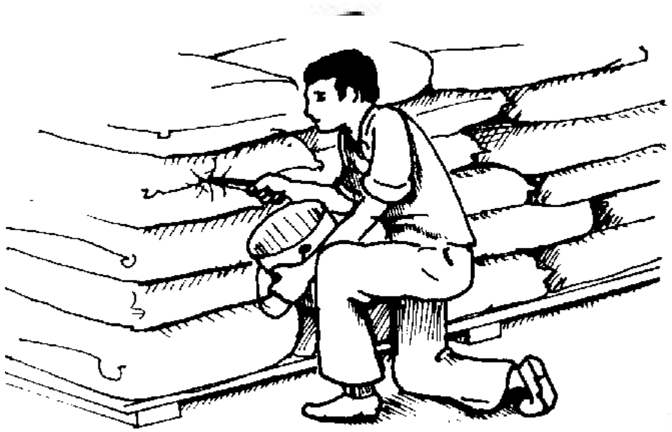
Muestra de cervezas

¿Está el proceso de llenado cumpliendo con lo prometido en la etiqueta?

¿Será el contenido medio de cerveza μ igual a 350ml?

Motivación 2





¿Está el saco de café cumpliendo con lo porcentaje de granos defectuosos?

¿Será el porcentaje p de granos defectuosos menor o igual al 3%?

Prueba de hipótesis

Una hipótesis estadística es una aseveración o conjetura con respecto a una o más poblaciones.

Tipos de hipótesis

Tipos

Hipótesis nula (H_0)

Status quo

Hipótesis alternativa (H_a o H_1)

Sospechas

¿Será lo mismo aceptar H_0 que no rechazar H_0?

Tipos de pruebas

$$H_0: \quad \theta = \theta_0$$
$$H_a: \quad \theta > \theta_0$$

Prueba unilateral derecha

$$H_0: \quad \theta = \theta_0$$
$$H_a: \quad \theta < \theta_0$$

Prueba unilateral izquierda

$$H_0: \quad \theta = \theta_0$$
$$H_a: \quad \theta \neq \theta_0$$

Prueba bilateral

Problemas de pruebas de hipótesis

- Pruebas
  - Para una muestra
    - μ
    - p
    - σ^2
  - Para dos muestras
    - $\mu_1 - \mu_2$
    - $\mu_1 - \mu_2$ pareadas
    - $p_1 - p_2$
    - σ_1^2 / σ_2^2

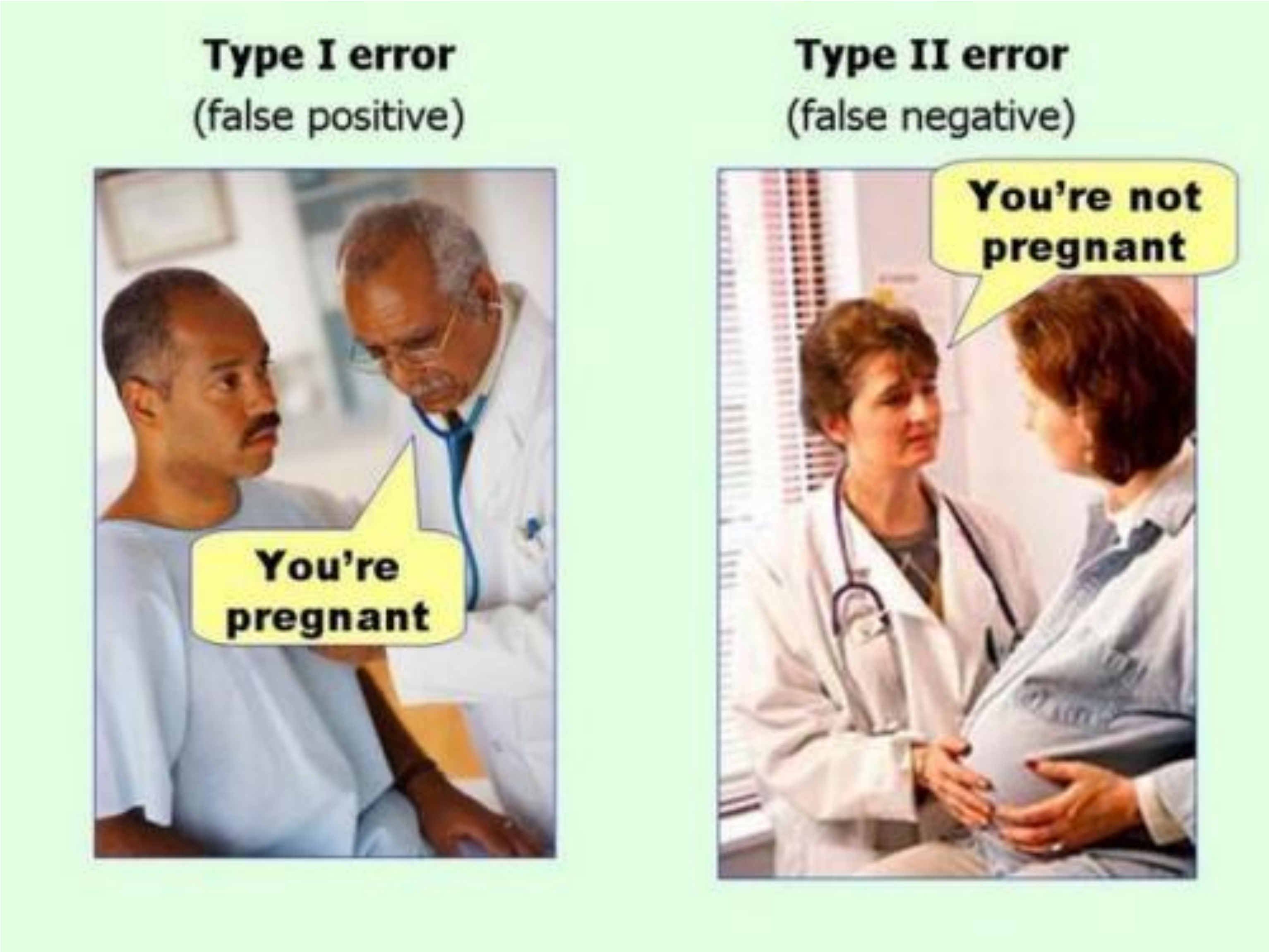
Proceso de prueba de hipótesis

1. Definir las hipótesis H_0 y H_a
2. Calcular el estadístico (evidencias)
3. Calcular el $valor\text{–}P$ o región de rechazo
4. Tomar la decisión

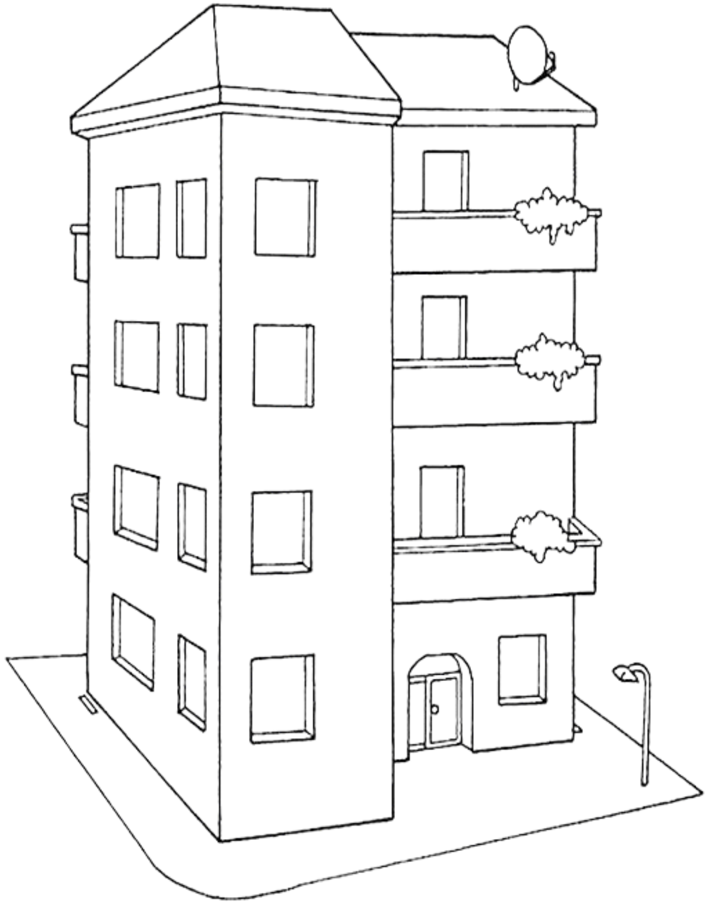
Tipos de errores en prueba de hipótesis

		Situación real de H_0	
		H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Decisión	Aceptar H_0	👍	Error tipo II (β)
	Rechazar H_0	Error tipo I (α)	👍

Error tipo I versus Error tipo II



Historia



Historia

$valor{-}P$

El $valor{-}p$ de una prueba de hipótesis es la probabilidad de obtener un estadístico (evidencias) igual al que se obtuvo o más extremo.

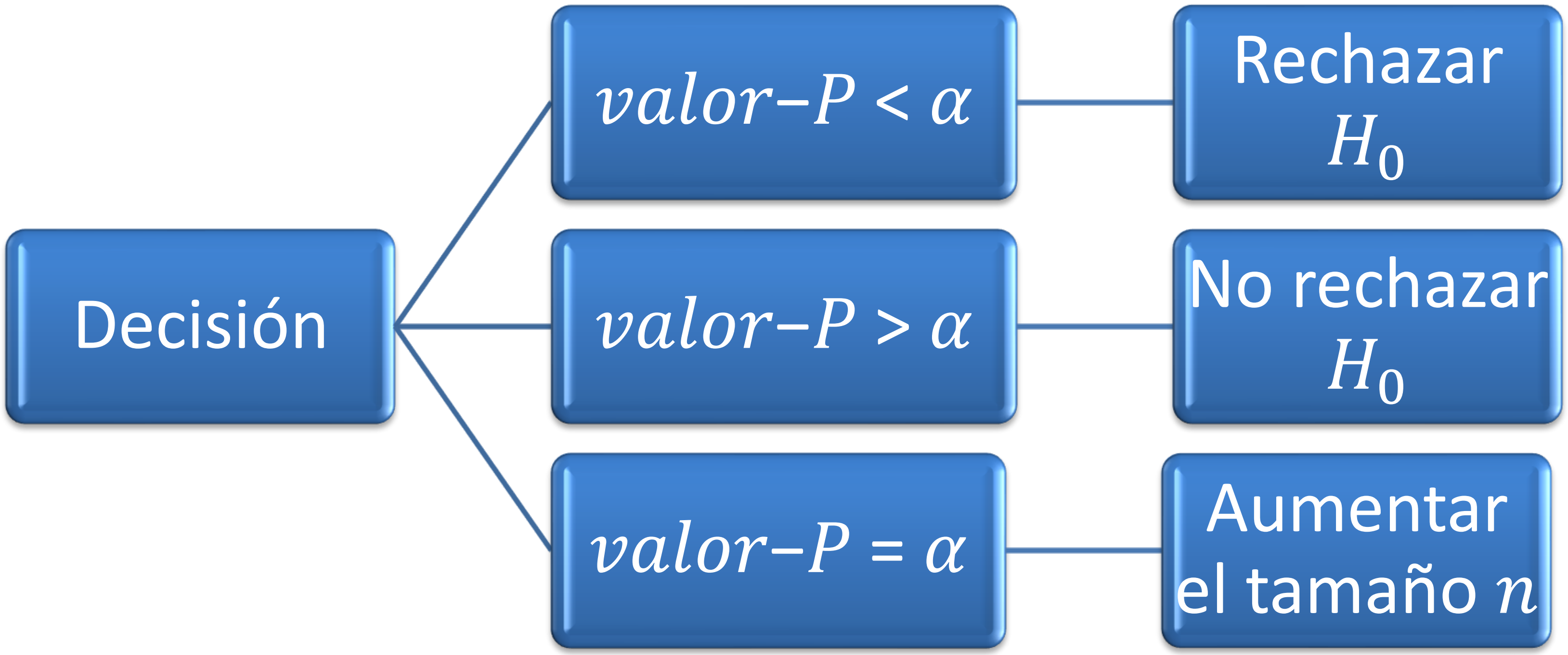
El $valor{-}P$ es la probabilidad calculada, suponiendo que H_0 es verdadera, de obtener un valor estadístico de prueba por lo menos tan contradictorio a H_0 como el valor que en realidad se obtuvo. Mientras más pequeño es el $valor{-}P$, más contradictorios son los datos a H_0.

$valor\text{−}P$

A tener en cuenta:

- El $valor\text{−}P$ es una probabilidad.
- Esa probabilidad es calculada asumiendo que H_0 es verdadera.
- Cuidado, el $valor\text{−}P$ no es la probabilidad de que H_0 sea verdadera ni es la probabilidad de un error.
- Para determinar el $valor\text{−}P$ debemos decidir cuáles valores del estadístico son al menos tan contradictorios a H_0.

Toma de decisión en pruebas de hipótesis



Caminos alternativos para hacer una prueba de hipótesis

- Región de crítica o de rechazo
- $valor\text{–}P$

Preguntas frecuentes

¿Cuándo se usa el procedimiento de prueba de hipótesis?

Preguntas frecuentes

¿Qué sucede si no tengo sospechas de nada?

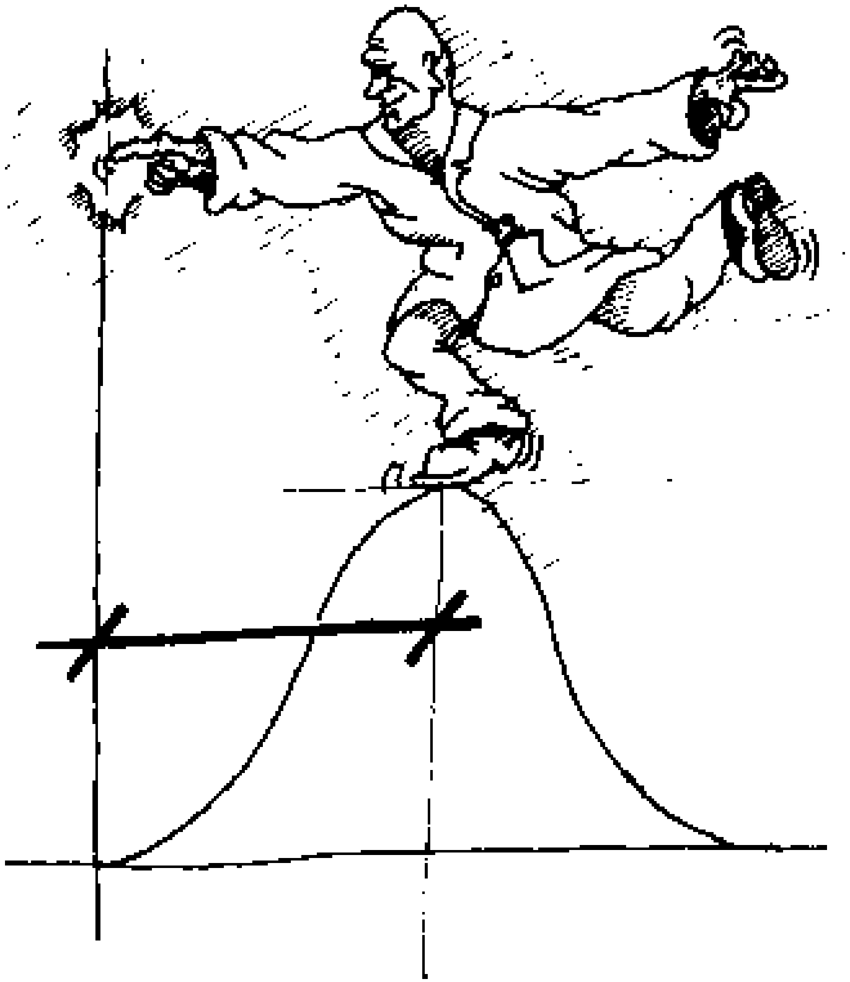
¿Qué sucede si mis sospechas no van en contra de H_0?

Preguntas frecuentes

¿De donde sale el valor θ_0 a colocar en la hipótesis nula?

$$H_0: \quad \theta = \theta_0$$

Prueba de hipótesis para μ



Prueba de hipótesis para μ

Se X una variable aleatoria distribuida $N(\mu, \sigma^2)$. Se extrae una muestra aleatoria $X_1, X_2, \cdots, X_n$ y el objetivo es probar una afirmación sobre μ.

- Caso 1: población normal y varianza σ^2 conocida.
- Caso 2: población normal y varianza σ^2 desconocida.
- Caso 3: población no normal, $n \geq 30$ y σ^2 conocida.
- Caso 4: población no normal, $n \geq 30$ y σ^2 desconocida.

Caso 1: Prueba de hipótesis para μ, población normal y σ^2 conocida

Paso 0. ¿Está la variable aleatoria distribuida en forma normal?

Paso 1. Definir las hipótesis

$$\begin{aligned} H_0&: \quad \mu = \mu_0 \\ H_a&: \quad \mu < \mu_0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} H_0&: \quad \mu = \mu_0 \\ H_a&: \quad \mu \neq \mu_0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} H_0&: \quad \mu = \mu_0 \\ H_a&: \quad \mu > \mu_0 \end{aligned}$$

Paso 2. Calcular el estadístico

Media muestral

Valor de referencia

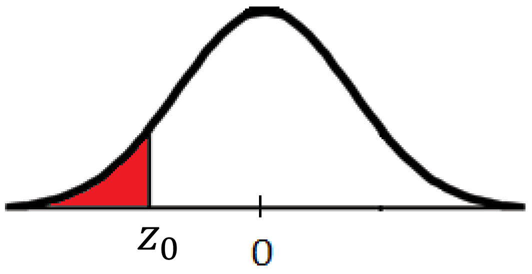
$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Desviación poblacional

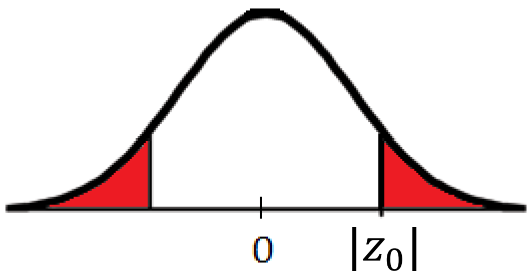
Tamaño de muestra

Paso 3. Calcular el $valor{-}P$ en una distribución $N(0,1)$.

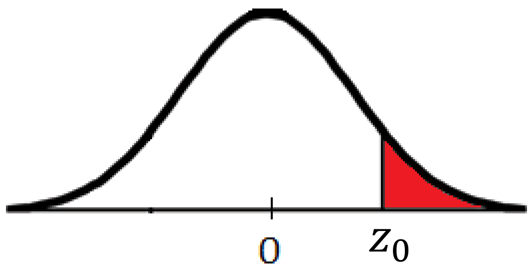
$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_a: \quad \mu < \mu_0$$



$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_a: \quad \mu \neq \mu_0$$



$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_a: \quad \mu > \mu_0$$



Cálculo del $valor - P$

- Si H_a: $\mu < \mu_0$

$$valor - P = P(Z \leq z_0).$$

- Si H_a: $\mu \neq \mu_0$

$$valor - P = 2 \times P(Z \geq |z_0|).$$

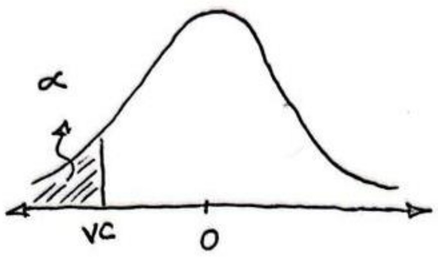
- Si H_a: $\mu > \mu_0$

$$valor - P = P(Z \geq z_0).$$

Regiones de rechazo

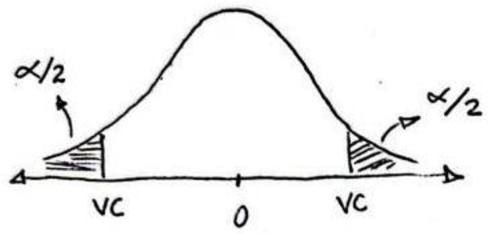
- Si $H_a: \mu < \mu_0$

  Se rechaza H_0 si $z_0 < -z_\alpha$



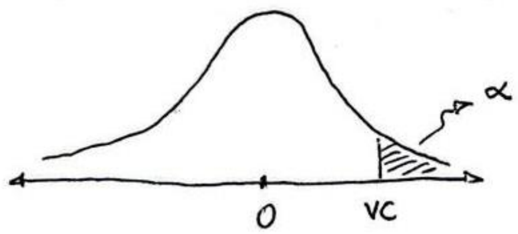
- Si $H_a: \mu \neq \mu_0$

  Se rechaza H_0 si $|z_0| > z_{\alpha/2}$



- Si $H_a: \mu > \mu_0$

  Se rechaza H_0 si $z_0 > z_\alpha$



Paso 5. Tomar decisión

Decisión

- $valor\text{–}P < \alpha$ → Rechazar H_0
- $valor\text{–}P > \alpha$ → No rechazar H_0
- $valor\text{–}P = \alpha$ → Aumentar el tamaño n

Ejemplo 1

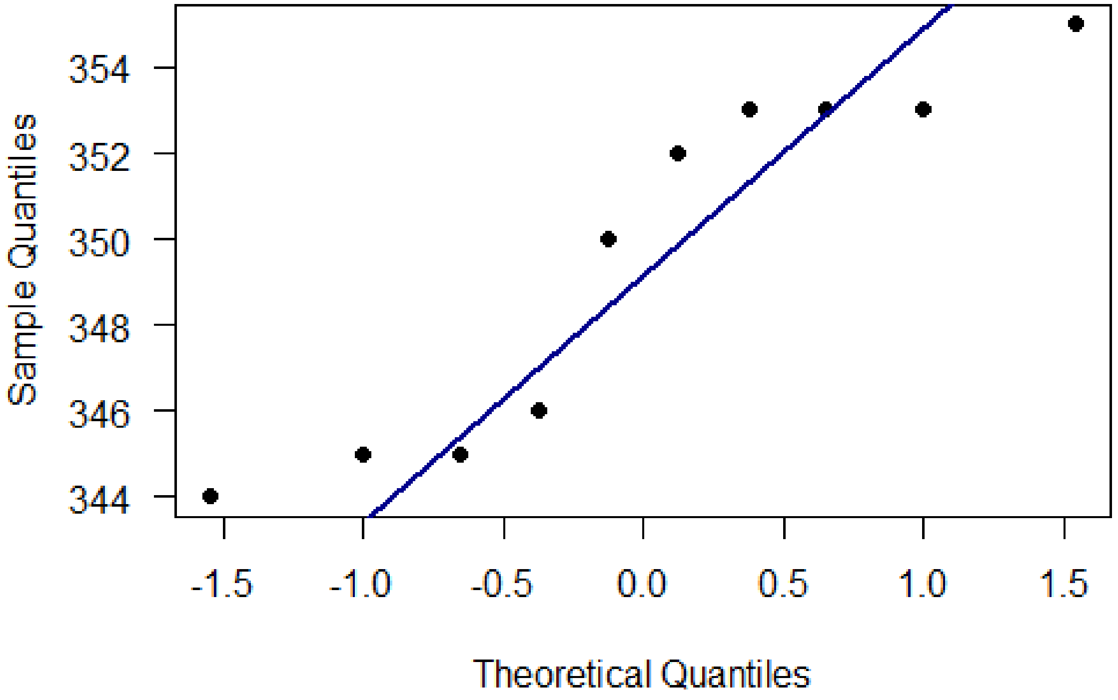
Las botellas de cerveza que salen de un proceso de llenado deben tener un contenido medio de 350 ml. El encargado sospecha que el contenido medio (μ) es menor que 350 ml. Por esa razón se tomó una muestra de botellas y sus contenidos fueron:

355, 353, 352, 346, 345, 345, 353, 353, 344, 350

Hacer la prueba con $\alpha = 0.05$ asumiendo $\sigma = 5$ ml.

Continuación ejemplo

Paso 0. Estudiando la normalidad.



Continuación ejemplo

Estudiando la normalidad por medio de la prueba Anderson-Darling.

En esta prueba las hipótesis son:

H_0: la m.a. viene de una población normal
H_a: la m.a. NO viene de una población normal

Esta prueba no se hace manualmente, se hace en R así:

Continuación ejemplo

Esta prueba se hace en R así:

```
cerveza <- c(355, 353, 352, 346, 345, 345, 353, 353, 344, 350)
shapiro.test(cerveza)
##
##      Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  cerveza
## W = 0.85993, p-value = 0.07617
##
```

Como el $valor{-}P$ de la prueba es 7.617% y es mayor que $\alpha = 0.05$, no rechazamos H_0, es decir que la m.a. si viene de una población normal.

Continuación ejemplo

Paso 1. Definir las hipótesis

$$H_0: \quad \mu = 350\, ml$$
$$H_a: \quad \mu < 350\, ml$$

Continuación ejemplo

Paso 2. Calcular el estadístico

De la muestra tenemos que:

$$\bar{x} = 349.6\, ml$$
$$n = 10$$

Por tanto el estadístico es:

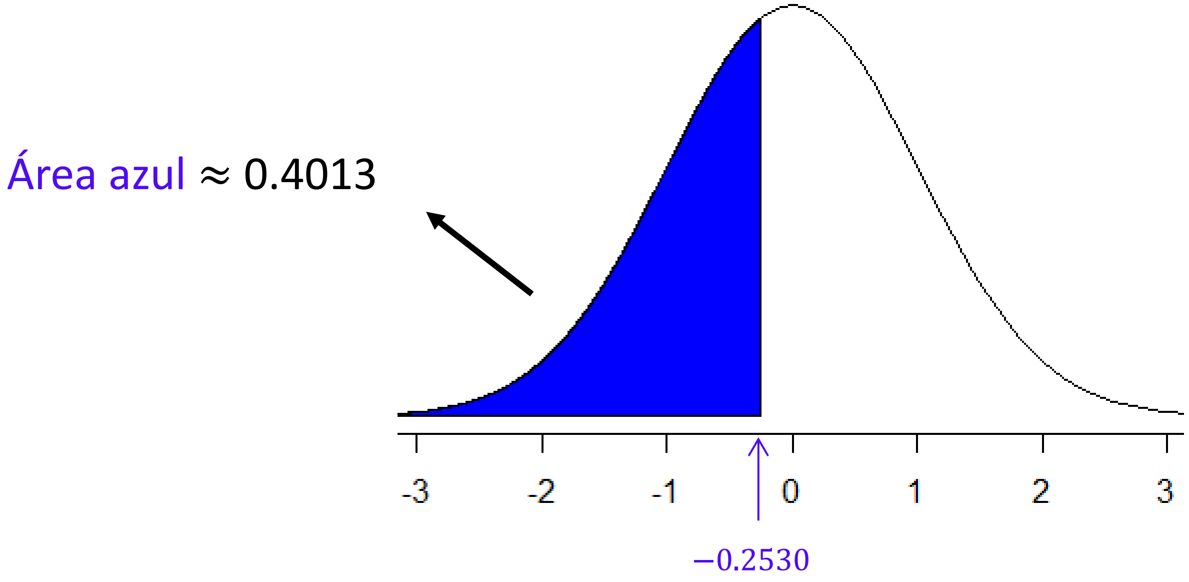
$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{349.6 - 350}{5/\sqrt{10}} = -0.2530$$

Continuación ejemplo

Paso 3. Calcular el $valor\text{–}P$ en una distribución $N(0,1)$.

En R la "colita azul" se obtiene así: `pnorm(q=-0.2530, lower.tail=TRUE)`

Por ser una prueba de una cola, $valor - P = 0.4013$.



Continuación ejemplo

Paso 4. Tomar decisión.

Como $valor{-}P > \alpha$, entonces NO RECHAZAMOS H_0.

Las evidencias muestrales no apoyan la sospecha de que $\mu < 350\ ml$.

Caso 2: Prueba de hipótesis para μ, población normal y σ^2 desconocida

Paso 0. ¿Está la variable aleatoria distribuida en forma normal?

Paso 1. Definir las hipótesis

$$H_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_a: \quad \mu < \mu_0 \qquad\qquad H_a: \quad \mu \neq \mu_0 \qquad\qquad H_a: \quad \mu > \mu_0$$

Paso 2. Calcular el estadístico

Media muestral

Valor de referencia

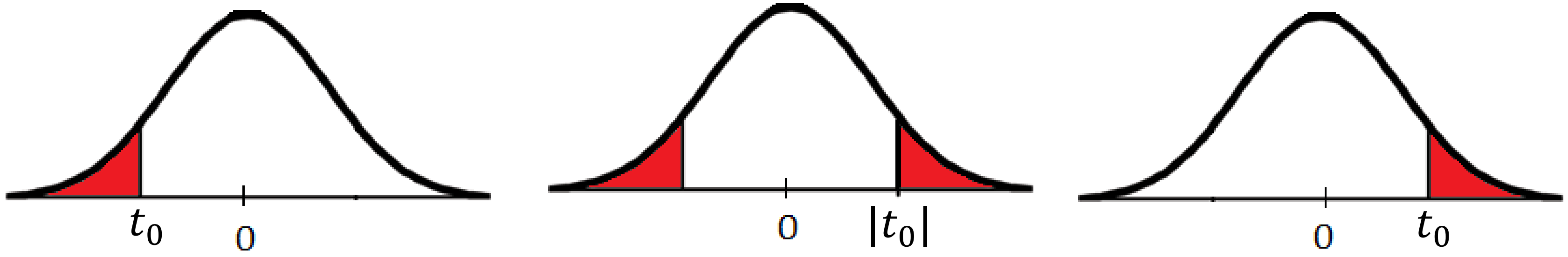
$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Desviación muestral

Tamaño de muestra

Paso 4. Calcular el $valor\text{–}P$ en una distribución t-student con $n-1$ grados de libertad.

$$H_0:\quad \mu = \mu_0 \qquad H_0:\quad \mu = \mu_0 \qquad H_0:\quad \mu = \mu_0$$
$$H_a:\quad \mu < \mu_0 \qquad H_a:\quad \mu \neq \mu_0 \qquad H_a:\quad \mu > \mu_0$$



Cálculo del $valor - P$

- Si H_a: $\mu < \mu_0$

$$valor - P = P(T_{n-1} \leq t_0).$$

- Si H_a: $\mu \neq \mu_0$

$$valor - P = 2 \times P(T_{n-1} \geq |t_0|).$$

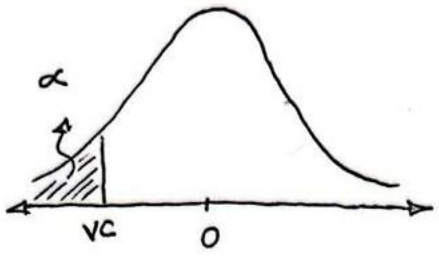
- Si H_a: $\mu > \mu_0$

$$valor - P = P(T_{n-1} \leq t_0).$$

Regiones de rechazo

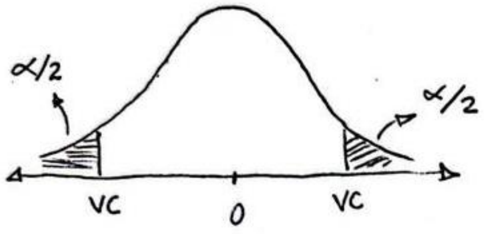
- Si $H_a: \mu < \mu_0$

  Se rechaza H_0 si $t_0 < -t_{\alpha,n-1}$



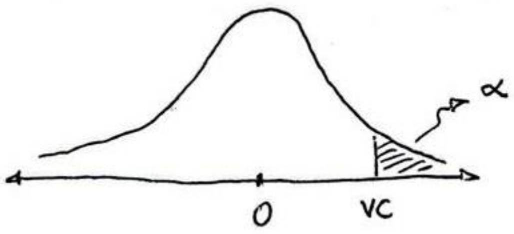
- Si $H_a: \mu \neq \mu_0$

  Se rechaza H_0 si $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

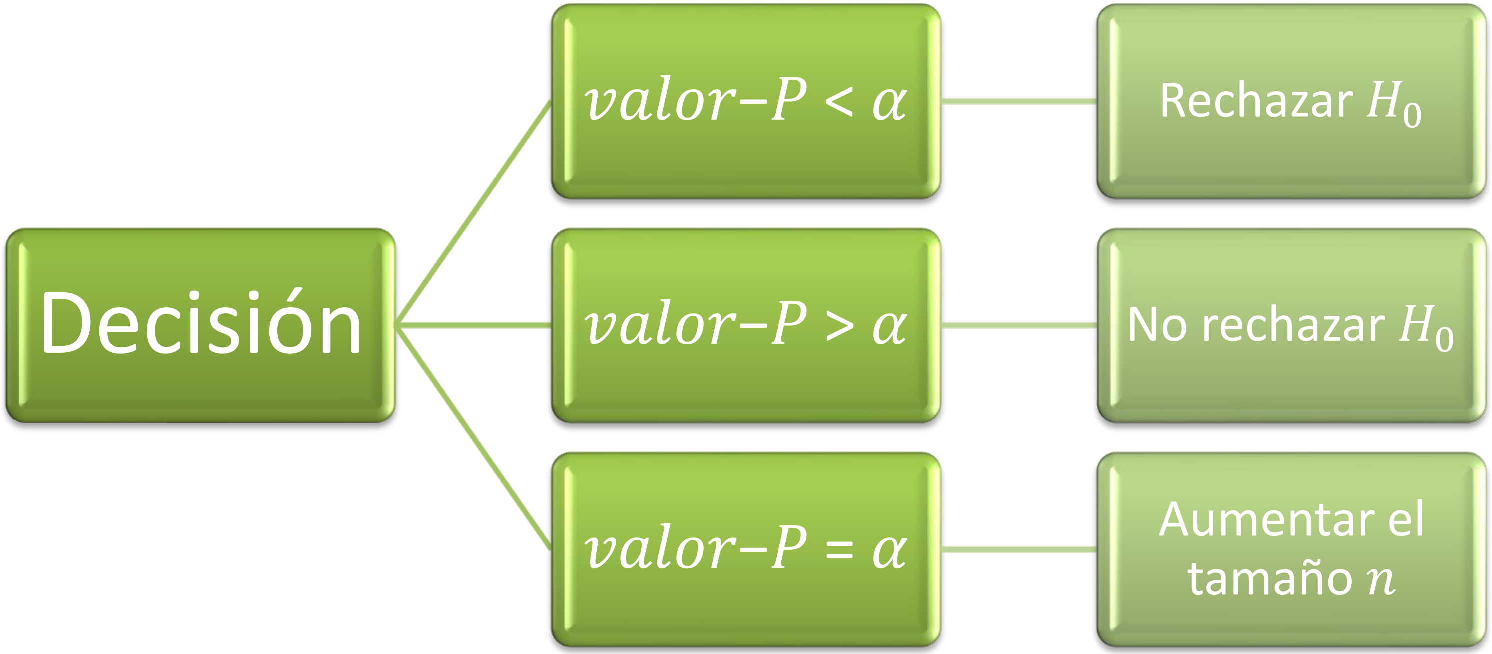


- Si $H_a: \mu > \mu_0$

  Se rechaza H_0 si $t_0 > t_{\alpha,n-1}$



Paso 4. Tomar decisión.



Ejemplo 2

Para verificar si el proceso de llenado de bolsas de café con 500 gramos está operando correctamente se toman aleatoriamente muestras de tamaño diez cada cuatro horas. Una muestra de bolsas está compuesta por las siguientes observaciones:

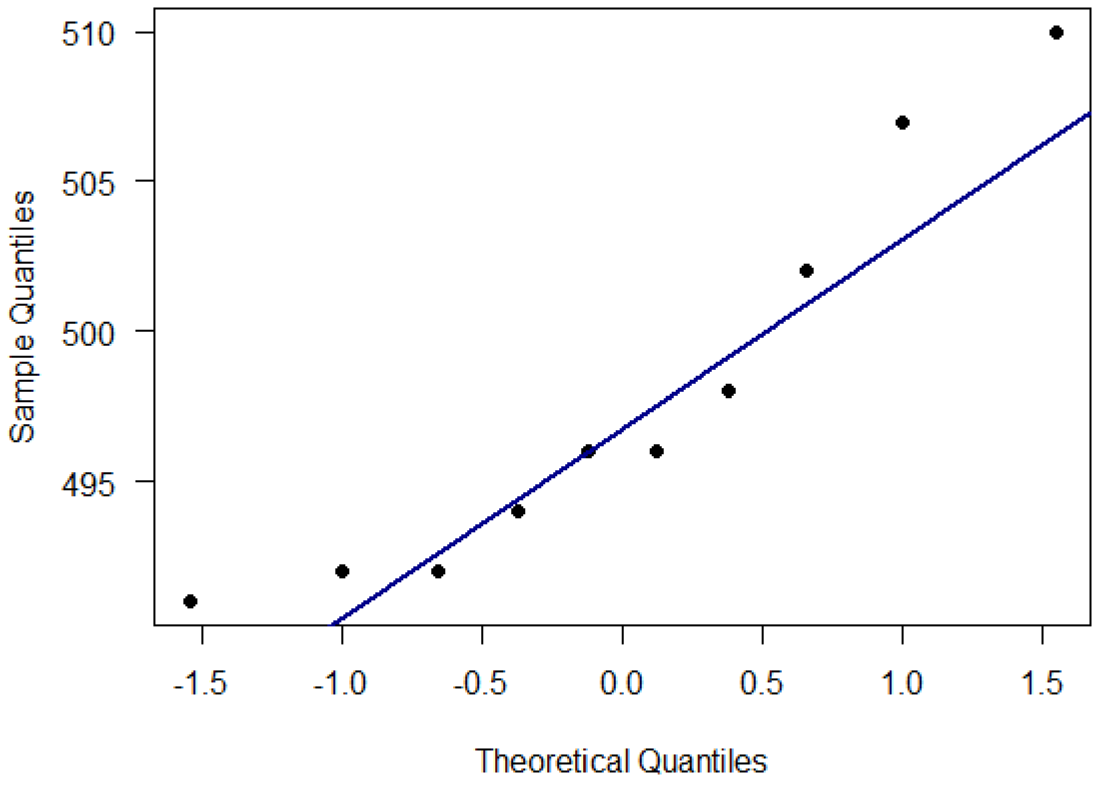
510, 492, 494, 498, 492, 496, 502, 491, 507, 496

¿Está el proceso llenando bolsas conforme lo dice la envoltura?

Hacer la prueba con $\alpha = 0.05$.

Continuación ejemplo

Paso 0. Estudiando la normalidad.



Continuación ejemplo

Estudiando la normalidad por medio de la prueba Anderson-Darling.

En esta prueba las hipótesis son:

H_0: la m.a. viene de una población normal
H_a: la m.a. NO viene de una población normal

Esta prueba no se hace manualmente, se hace en R así:

Continuación ejemplo

Esta prueba se hace en R así:

```
contenido <- c(510, 492, 494, 498, 492, 496, 502, 491, 507, 496)
shapiro.test(contenido)
##
##      Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  contenido
## W = 0.88468, p-value = 0.1476
##
```

Como el $valor–P$ de la prueba es 0.1476, no rechazamos H_0, es decir que la m.a. si viene de una población normal.

Continuación ejemplo

Paso 1. Definir H_0 y H_a

$$H_0: \quad \mu = 500\ gr$$
$$H_a: \quad \mu \neq 500\ gr$$

Continuación ejemplo

Paso 2. Calcular el estadístico

De la muestra tenemos que:

$$\bar{x} = 497.8\ gr$$
$$s = 6.546\ gr$$
$$n = 10$$

Por tanto el estadístico es:

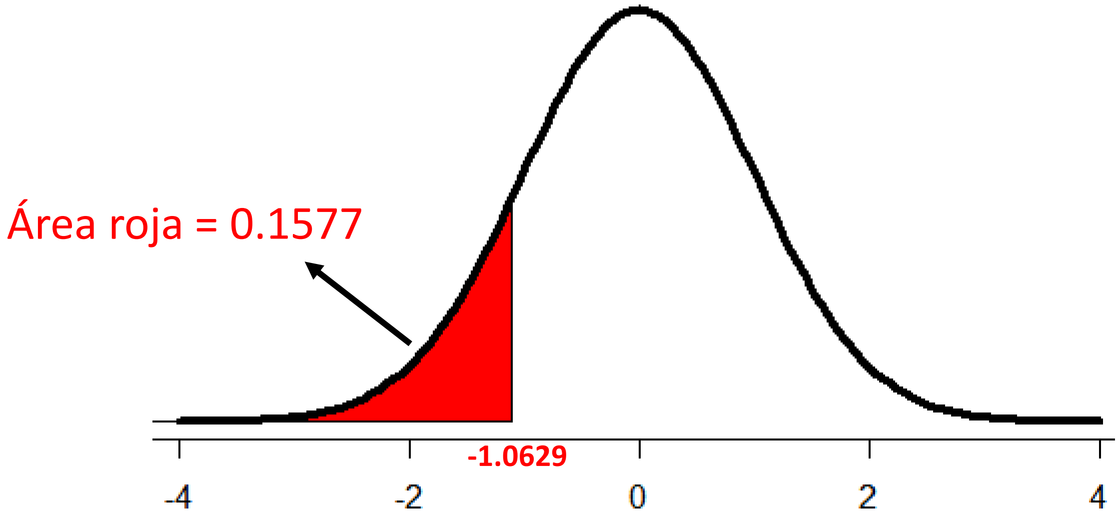
$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{{}^{s}/_{\sqrt{n}}} = \frac{497.8 - 500}{{}^{6.546}/_{\sqrt{10}}} = -1.0629$$

Continuación ejemplo

Paso 3. Calcular el $valor–P$ en una distribución t-student con $n - 1$ grados de libertad.

En R la "colita roja" se obtiene así: `pt(q=-1.0629, df=9, lower.tail=TRUE)`

Por ser una prueba de dos colas, $valor - p = 2 \times 0.1577 = 0.3155.$



Continuación ejemplo

Paso 4. Tomar la decisión.

Como $valor\text{−}P > \alpha$ entonces NO RECHAZAMOS H_0.

El proceso está llenando las bolsas conforme al aviso en la envoltura.

Ejemplo 3

Tiempo después se lleva a cabo otra verificación del proceso y se obtiene la siguiente muestra:

500, 495, 494, 498, 495, 500, 500, 496, 498, 493.

¿Está el proceso llenando bolsas conforme lo dice la envoltura?

Usar un nivel de significancia del 5%.

Continuación ejemplo

Paso 0. Asumamos que se cumple la normalidad.

Paso 1. Definir las hipótesis.

$$H_0: \quad \mu = 500\ gr$$
$$H_a: \quad \mu \neq 500\ gr$$

Continuación ejemplo

Paso 2. Calcular el estadístico

De la muestra tenemos que:

$$\bar{x} = 496.9\ gr$$
$$s = 2.643\ gr$$
$$n = 10$$

Por tanto el estadístico es:

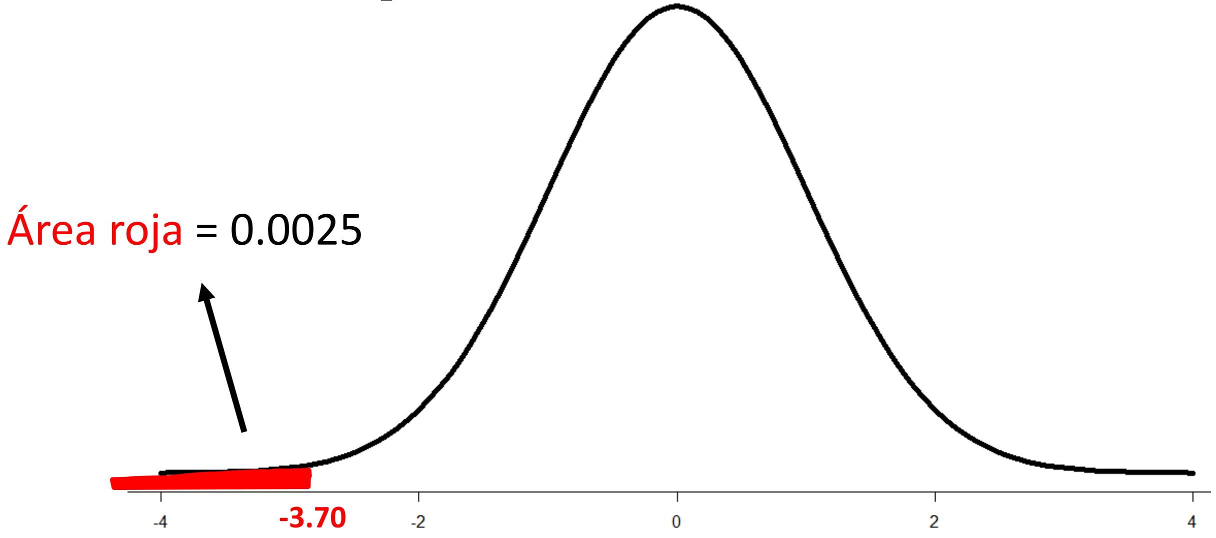
$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{496.9 - 500}{2.643/\sqrt{10}} = -3.70$$

Continuación ejemplo

Paso 3. Calcular el $valor\text{–}P$ en una distribución t-student con $n-1$ grados de libertad.

En R la "colita roja" se obtiene así: `pt(q=-3.70, df=9, lower.tail=TRUE)`

Por ser una prueba de dos colas, $valor - p = 2 \times 0.0025 = 0.0049.$



Continuación ejemplo

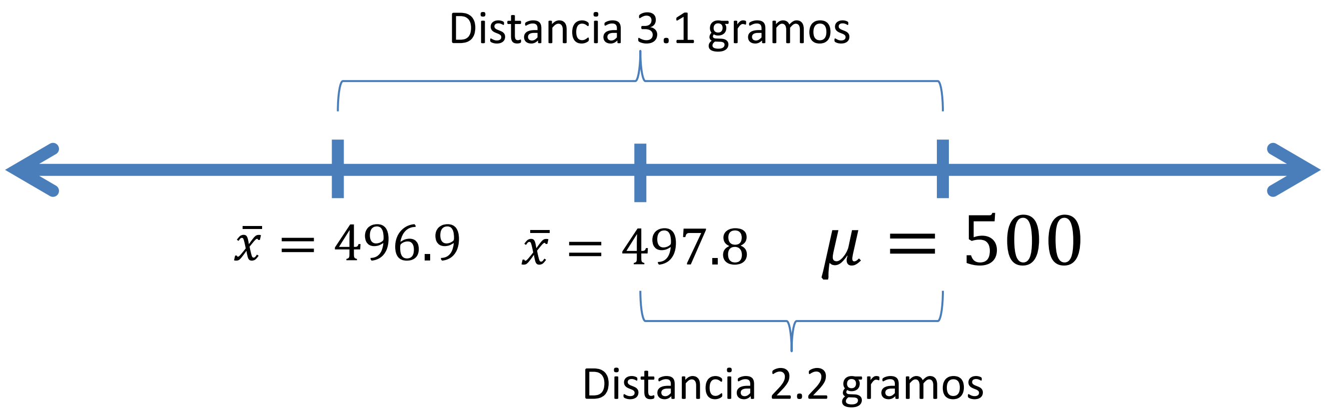
Paso 4. Tomar la decisión.

Como $valor\text{–}P < \alpha$ entonces RECHAZAMOS H_0.

El proceso NO está llenando las bolsas conforme al aviso en la envoltura.

Resumen de los ejemplos 2 y 3

	Ejemplo 2	Ejemplo 3
Muestra	510, 492, 494, 498, 492, 496, 502, 491, 507, 496	500, 495, 494, 498, 495, 500, 500, 496, 498, 493
Media muestral	497.8 gramos	496.9 gramos
Desviación muestral	6.546 gramos	2.643 gramos
Tamaño de muestra	10	10
Hipótesis nula	$H_0: \quad \mu = 500\ gr$	$H_0: \quad \mu = 500\ gr$
$valor{-}P$ con R	0.3155	0.0049
Decisión	No rechazamos H_0	Rechazamos H_0



Cuestión importante

¿Será que existe alguna relación entre los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis?

$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_a: \quad \mu \neq \mu_0$$

La respuesta se puede encontrar en la sección 10.6 de Walpole et al. (1999) o en la página 339 de Walpole et al. (2011).

Prueba de hipótesis para μ con muestras grandes

Sea X una variable con una distribución cualquiera con media μ.

Se extrae una muestra aleatoria $X_1, X_2, \cdots, X_n$ y el objetivo es probar una afirmación sobre μ.

La muestra aleatoria debe cumplir que $n \geq 30$,

Caso 3: Prueba de hipótesis para μ, población no normal y σ^2 conocida

El estadístico en este caso es:

Media muestral

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Valor de referencia

Tamaño de muestra

Desviación muestral

y Z_0 se distribuye $N(0,1)$.

Caso 4: Prueba de hipótesis para μ, población no normal y σ^2 desconocida

El estadístico en este caso es:

Media muestral

Valor de referencia

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

Tamaño de muestra

Desviación muestral

y Z_0 se distribuye $N(0,1)$.

Ejemplo

Se afirma que los automóviles recorren en promedio más de 20000 kilómetros por año pero usted cree que el promedio es en realidad menor. Para probar tal afirmación se pide a una muestra de 100 propietarios de automóviles seleccionada de manera aleatoria que lleven un registro de los kilómetros que recorren.

¿Estaría usted de acuerdo con esta afirmación, si la muestra aleatoria indicara un promedio de 19500 kilómetros y una desviación estándar de 3900 kilómetros? Utilice el valor-p en su conclusión y $\alpha = 3\%$.

Continuación ejemplo

Paso 1. Definir hipótesis

$$H_0: \quad \mu \geq 20000\ km$$
$$H_a: \quad \mu < 20000\ km$$

Continuación ejemplo

Paso 2. Calcular el estadístico

De la muestra tenemos que:

$$\bar{x} = 19500\ km$$
$$s = 3900\ km$$
$$n = 100$$

Por tanto el estadístico es:

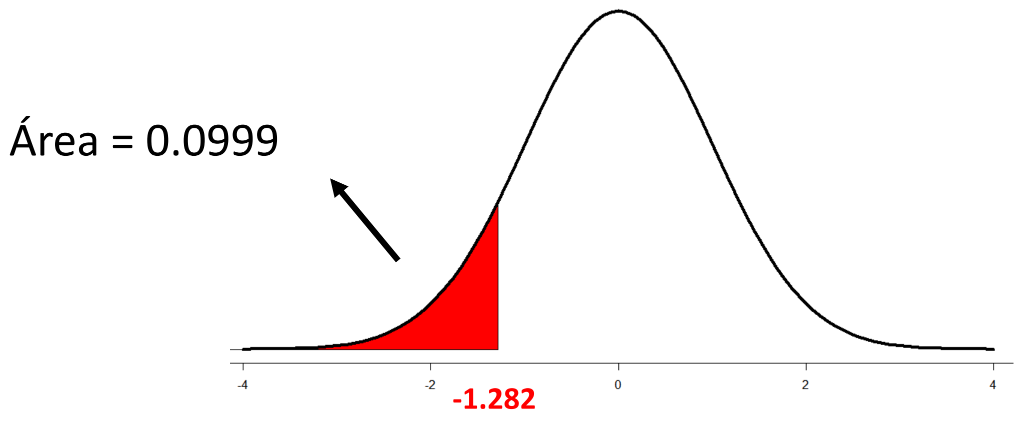
$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{19500 - 20000}{3900/\sqrt{100}} = -1.2820$$

Continuación ejemplo

Paso 3. Calcular el $valor–P$ en una distribución normal estándar.

En R la “colita roja” se obtiene así: `pnorm(q=-1.2820, lower.tail=TRUE)`

Por ser una prueba de dos colas, $valor - P = 0.0999$.



Continuación ejemplo

Paso 4. Tomar decisión.

Como $\mathrm{V}alor - P > \alpha$ entonces NO RECHAZAMOS H_0

No hay evidencias suficientes para pensar que ha disminuido el recorrido anual de los autos.