Clase 15: Intervalos de confianza para la media y proporciones con muestras grandes

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Ejemplo de IC para la Media

Un fabricante produce anillos para los pistones de un motor de automóvil. Se sabe que el diámetro del anillo tiene una distribución normal. De la experiencia se ha encontrado que la dispersión en los diámetros es aproximadamente de 0.05 mm. Se escogen al azar 15 anillos y se miden sus diámetros. El diámetro promedio resultó en 74.04 mm.

a) Calcule un IC al 95% para el diámetro medio real de estos anillos.
b) Si se desea que la precisión del intervalo sea inferior a 0.01, con una confianza del 95%. ¿Cuál debe ser el mínimo tamaño de muestra para cumplir éste objetivo?

Solución

a) Sea $X_1, \cdots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim N(\mu,\, 0.05^2)$ con $i = 1, 2, \cdots, 15$. De la muestra se obtiene $\bar{x} = 74.04$ mm.

Un IC al 95% para μ es de la forma:

$$\bar{x} \pm z_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{15}} \,.$$

Se sabe que $z_{0.025} = 1.96$ y $\sigma = 0.05$. Así, un IC al 95% para μ es

$$74.04 \pm 1.96 \frac{0.05}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow (74.0147\,,\, 74.0653)\,.$$

b) Debido a que el IC calculado es simétrico, dicha precisión se obtendría como la mitad de la longitud del intervalo, es decir, $1.96\frac{0.05}{\sqrt{n}}$.

Se desea que

$$1.96\frac{0.05}{\sqrt{n}} < 0.01 \Leftrightarrow \frac{1.96\,(0.05)}{0.01} < \sqrt{n}.$$

$$\therefore\ n > 96.04\ \boxed{n \approx 97}\ \blacktriangle\,.$$

Ejemplo de IC para la Media

La duración de cierto tipo de foco es una v.a. la cual se distribuye Normal, con media μ y desviación estándar de 25 horas. El fabricante afirma que la duración promedio real de sus focos es superior a las 1010 horas. Para verificar esto se toma una m.a de 20 focos y se miden sus duraciones. La duración promedio obtenida en la muestra es de 1014 horas. ¿Es cierta la afirmación del fabricante? Calcule un IC al 95% para μ.

Solución

Sea $X_1, \cdots, X_{20}$ una m.a. que representa las duraciones de los 20 focos, $X_i \sim N(\mu, 625)$; $i = 1, 2, \cdots, 20$. $\bar{x} = 1014$. Un IC unilateral superior al 95% para μ es de la forma:

$$(\bar{x} - z_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{20}}, +\infty)$$

Como $\sigma = 25$ y $z_{0.05} = 1.64$, se tiene que un IC al 95% para μ es:

$$(1014 - 1.64\frac{25}{\sqrt{20}}, +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad (1004.82, +\infty).$$

Con una confianza del 95% no se puede afirmar que la duración promedio real de los focos sea superior a las 1010 horas. El fabricante no tiene razón.

Ejemplo de IC para la Media

Una máquina produce varillas de metal utilizadas en el sistema de suspensión de un automóvil. De la experiencia se ha encontrado que los diámetros de este tipo de varillas, se distribuyen normalmente. Se toma una m.a. de 15 varillas y se miden sus respectivos diámetros. Se obtiene un diámetro promedio de 8.234 cm con una desviación estándar de 0.0253 cm. Si el diámetro promedio de las varillas es superior a 8.2 cm se acepta el lote, ¿qué puede inferir a cerca del lote? Use un IC apropiado del 95% para responder.

Solución

Sea $X_1, \cdots, X_{15}$ una m.a. que representa los diámetros de las 15 varillas. Suponga que $E[X_i] = \mu$ y $Var[X_i] = \sigma^2$, ambas desconocidas.

Del enunciado se tiene que $\bar{x} = 8.234$, $s = 0.0253$, $n = 15$.

Como la m.a. proviene de una población normal, el tamaño de la muestra n es pequeño y se desconoce la varianza, un IC unilateral superior al 95% para μ está dado por:

$$\left(\bar{x} - t_{0.05,14}\,\frac{s}{\sqrt{15}}\,,\,+\infty\right).$$

Ahora, $t_{0.05,14} = 1.761$. Con esto se obtiene que un IC al 95% para μ es:

$$\left(8.234 - 1.761\,\frac{0.0253}{\sqrt{15}}\,, +\infty\right) \quad \Leftrightarrow \quad (8.2225, +\infty)$$

Se espera que el diámetro medio real sea mayor a $8,2225$ cm., con una confianza del 95% .

Se puede inferir que el lote es aceptado, con una confianza del 95%.

Ejemplo de IC para la Media

La dirección de una clínica desea estimar el número de días de estancia promedio necesario para el tratamiento de pacientes entre 25 y 34 años. El estudio de esta variable durante muchos años, ha permitido determinar que el número de días de estancia promedio se distribuye normalmente. Una m.a. de 15 pacientes arrojó un promedio de 5.4 días y una desviación estándar de 3.1 días. Halle un IC al 95% para μ: # promedio real de días de estancia en dicha clínica.

Solución

Sea $X_1, \cdots, X_{15}$ una m.a. que representa los tiempos en dias de los 15 pacientes. $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, donde μ y σ^2 son desconocidos, para $i = 1, 2, \cdots, 15$. Sabemos que $\bar{x} = 5.4$, $s = 3.1$ y $n = 15$.

Un IC al 95% para μ es de la forma:

$$\bar{x} \pm t_{0.025,14} \frac{s}{\sqrt{n}} .$$

Como $t_{0.025,14} = 2.145$, se tiene que un IC al 95% para μ es:

$$5.4 \pm 2.145 \frac{3.1}{\sqrt{15}} \quad \Leftrightarrow \quad (3.6831, 7.1169) .$$

Ejemplo de IC para la Media

Un artículo publicado en cierta revista presenta las mediciones de tiempos de combustión residual (en seg) de especimenes tratados de ropa de dormir para niños. Se seleccionaron 50 especimenes y se obtuvo un tiempo promedio de 9.8525 seg y una desviación estándar de 0.0965 seg. Calcule un IC aproximado al 95% para el tiempo medio real de combustión.

Solución

Sea $X_1, \cdots, X_{50}$ una m.a. que representa los tiempos de combustión residual de los 50 especimenes escogidos.

$E[X_i] = \mu \quad$ y $\quad Var[X_i] = \sigma^2; \quad i = 1, \cdots, 50$; ambas desconocidas.

Un IC aproximado al 95% para μ es de la forma:

$$\bar{x} \pm z_{0.025} \frac{s}{\sqrt{50}}$$

Del enunciado tenemos que $\bar{x} = 9.8525$, $S = 0.0965$ y $Z_{0.025} = 1.96$.

Así, un IC al 95% (aproximado) para μ es

$$9.8525 \pm 1.96 \frac{0.0965}{\sqrt{50}} \quad \Leftrightarrow \quad 9.8525 \pm 0.0267 \quad \Leftrightarrow \quad (9.8258\ ,\ 9.8792)\ .$$

Ejercicio de IC para la Media

Suponga que el tiempo transcurrido entre las fallas de una unidad de disco de un centro de computo, se distribuye aproximadamente normal, con media μ y varianza σ^2, con $\sigma = 215$ horas y μ desconocida. Una medida del desempeño de esta unidad de disco es el tiempo medio entre fallas, con el fin de estimar este valor, el centro de computo registró el tiempo entre fallas de la unidad de disco, y se calcularon los siguientes estadísticos: $\bar{x} = 1762$ horas y n= 15.

a. Se cree que el tiempo medio de fallas es superior a 1700 horas, verifiquelo usando un IC apropiado al 90% para μ.

c. ¿Que tan grande debe ser el tamaño de muestra si se quiere tener un 90% de confianza de que nuestra estimación difiera de μ a lo sumo de 40 horas?

Intervalos de Confianza para p

Un IC aproximado para la probabilidad de éxito de una Binomial, p, cuando $n \geq 30$, está dado por:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}},$$

donde $x =$ es el número de éxitos observados en la muestra de tamaño n y $\hat{p} = \frac{x}{n}$.

Este intervalo de confianza se puede usar cuando se cumplan las siguientes dos condiciones.

- $n\hat{p} \geq 10$.
- $n(1-\hat{p}) \geq 10$.

Ejemplo de IC para p

Se lleva a cabo un estudio para determinar la efectividad de una vacuna contra la gripe. Se administra la vacuna a una muestra aleatoria de 3000 sujetos y 13 contraen gripe. Obtenga un IC al 95% para la proporción real de sujetos vacunados que contraen gripe.

Solución

Sea X: # sujetos vacunados que contraen gripe de los 3000 vacunados. Según el enunciado se tiene que:

$$\alpha = 0.05, \quad z_{0.025} = 1.96, \quad \hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{13}{3000}.$$

Un IC aproximado del 95% para p es:

$$\frac{13}{3000} \pm 1.96\sqrt{\frac{\frac{13}{3000}\left(1-\frac{13}{3000}\right)}{3000}}$$

$$\Leftrightarrow 0.004333 \pm 0.002351 \quad \Leftrightarrow \quad (0.001982, 0.006684)\ .$$

Ejemplo de IC para p

En una muestra de 85 soportes para el cigüeñal de un motor, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo permitido. Hallar un IC al 95% para p, la proporción real de soportes con esta característica.

Solución

Sea X: # soportes con terminado más rugoso de lo permitido. $X \sim bin(85, p)$. Del enunciado se tiene que: $\hat{p} = \frac{x}{85} = \frac{10}{85} = 0.12$.

El IC aproximado del 95% para p se obtiene así:

$$0.12 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85}} \quad \Leftrightarrow \quad 0.12 \pm 0.069 \quad \Leftrightarrow \quad (0.051, 0.189)\ .$$

Ejercicio de IC para p

Una encuesta a 120 personas revela que el 63% de los trabajadores encuestados, piensan que su jubilación es insuficiente, calcule un IC del 90% para la proporción de trabajadores que tienen esta opinión.