Clase 13: Estimadores de máxima verosimilitud o de máxima probabilidad

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Método de máxima verosimilitud

Uno de los mejores métodos para obtener un estimador puntual de un parámetro poblacional es el método de máxima verosimilitud. Este método consiste en obtener el valor de θ (entre todos los posibles) que hagan más verosimil (más probable) un resultado obtenido.

Método de máxima verosimilitud

Definición

Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución f que depende de un parámetro θ (o vector de parámetros θ) por notación escribimos $f(x;\theta)$.

La función de verosimilitud de la muestra, la cual se denota $L(\theta;\mathbf{X})$ o simplemente $L(\theta)$, se define como:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta) \,.$$

El estimador de máxima verosimilitud de θ, denotado EMV, será aquel valor de θ que maximiza a $L(\theta)$. Debido a que las expresiones para $L(\theta)$ pueden ser complejas, se suele maximizar el logaritmo natural de $L(\theta)$, el cual es denotado $\ell(\theta)$.

Procedimiento para hallar los E.M.V

1. Hallar la función de verosimilitud de θ, $L(\theta)$
2. Hallar la función del log-verosimilitud de θ, $\ell(\theta) = ln(L(\theta))$
3. Aplicar la primera derivada al log-verosimilitud, $\ell(\theta)$ e igualar a cero para encontrar los puntos críticos.
4. Verificar que los puntos críticos son puntos de máximo.

Ejemplo EMV para p en Bernoulli

Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Bernoulli con parámetro p. Halle el EMV para p.

<u>Solución:</u>

La f.m.p. de una Bernoulli con parámetro p es $f(x; p) = p^x (1-p)^{1-x}; \quad x = 0, 1.$

Paso 1:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{X_i} (1-p)^{1-X_i} = p^{\sum X_i} (1-p)^{n-\sum X_i}$$

Paso 2:

$$\ell(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i \, ln\, p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) ln(1-p)$$

Paso 3:

$$\frac{d}{dp}\ell(p) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} Xi - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Si $\hat{p}$ es el EMV, entonces $\ell^{'}(\hat{p}) = 0.$

Igualando a cero.

$$\frac{1}{\hat{p}}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-\hat{p}}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 0 \quad \therefore \quad \hat{p} = \frac{\sum^{n} X_i}{n}$$

Paso 4: Verificar que es un máximo con la segunda derivada.

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial p^2} = \frac{-1}{p^2}\sum_{i=1}^{n} Xi - \frac{1}{(1-p)^2}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) < 0$$

Así, $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ es el EMV para p. Recuerde que X es una variable aleatoria que toma valores de 0 y 1, luego, $\hat{p}$ no se puede ver como un promedio es una proporción.

Ejemplo EMV para λ en Poisson

Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una Poisson con parámetro λ desconocido. Halle el EMV para λ.

Solución:

1. $$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X_i}}{X_i!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} X_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n} X_i!}$$

2. $$\ell(\lambda) = \ln(e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} X_i}) - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i!\right) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i!$$

3. *Si* $\hat{\lambda}$ *es EMV entonces* $\ell'(\hat{\lambda}) = 0 \;\Leftrightarrow\; -n + \frac{1}{\hat{\lambda}} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \;\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

4. $\ell''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} X_i < 0.$

Así, el EMV para λ es $\hat{\lambda} = \bar{X}$.

Ejemplo de EMV para μ y σ^2 en normal

Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, ambas desconocidas. Halle los EMV para μ y σ^2.

<u>Solución:</u>

La función de verosimilitud en este caso está dada por:

1. $$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i-\mu)^2} \quad ; \quad \mu \in \mathbb{R}\,,\ \sigma > 0\,.$$

$$L(\mu, \sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, \sigma^{-n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}\,.$$

Tomando logaritmo natural se obtiene:

$$2.\quad \ell(\mu\,,\,\sigma) = -\frac{n}{2}\,ln(2\pi) - n\,ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\,X_i - \mu\,)^2\,.$$

$$3.\quad \frac{\partial\ell}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\,X_i - \mu\,)\ \text{ y }\ \frac{\partial\ell}{\partial\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(\,X_i - \mu\,)^2\,.$$

Si $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ son los EMV para μ y σ respectivamente, entonces:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(\,X_i - \hat{\mu}\,) = 0\ \text{ y }\ -\frac{n}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3}\sum_{i=1}^{n}(\,X_i - \hat{\mu}\,)^2 = 0\,.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 .$$

4. Verificar si son puntos de máximo.

En efecto son EMV, se calculan las segundas derivadas parciales con respecto a μ y σ.

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} \, , \; \frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu \partial \sigma} = -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) .$$

La respectiva matriz de segundas derivadas parciales está dada por:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^2} & -\dfrac{2}{\sigma^3}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \\ -\dfrac{2}{\sigma^3}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu) & \dfrac{n}{\sigma^2}-\dfrac{3}{\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \end{bmatrix}_{\hat{\mu}\,,\,\hat{\sigma}^2}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\hat{\sigma}^2} & -\dfrac{2}{\hat{\sigma}^3}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}) \\ -\dfrac{2}{\hat{\sigma}^3}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}) & \dfrac{n}{\hat{\sigma}^2}-\dfrac{3}{\hat{\sigma}^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \end{bmatrix}.$$

Nota: $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})=0$ porque $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=n\bar{X}$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\hat{\sigma}^2}, & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{\hat{\sigma}^2} - \dfrac{3}{\hat{\sigma}^4}\, n\hat{\sigma}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\,n}{\hat{\sigma}^2} \end{bmatrix} .$$

El determinante de la matriz de segundas derivadas es positivo y $\dfrac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2}$ es < 0, luego $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$ son los EMV para μ y σ^2:

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 .$$

Ejercicios propuestos de EMV

1. Se sabe que una m.a de 12, 11.2, 13.5, 12.3, 13.8, 11.9, se tomó de una población con f.d.p, dada por:
$$f(x) = \frac{\theta}{X^{\theta+1}}; \quad x > 1$$
$\theta > 0$. Encuentre el EMV para θ.
2. Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una exponencial con parámetro λ. Halle el EMV para λ.
3. Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una lognormal con parámetros μ y σ^2. Halle los EMV para μ y σ^2.
4. Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $Gamma(\alpha, \beta)$. Suponiendo que α es conocido, halle el EMV para β.