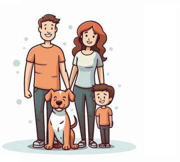
Clase 12: Estimación puntual, conceptos básicos y propiedades. Estimadores Insesgados y de mínima varianza

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Ilustración

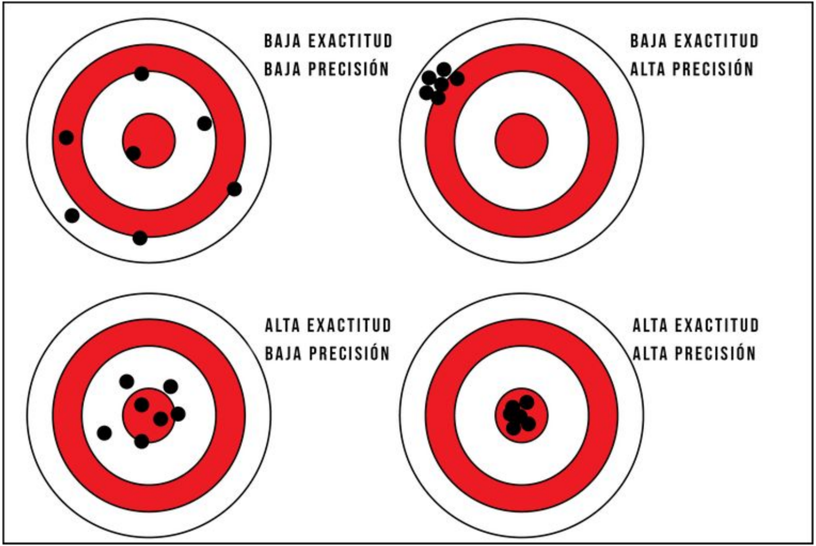


Tipos de estimación

- Puntual.
- Por intervalo.

Tarea: ver el siguiente video `https://youtu.be/cMqgG_lBC2U?si=hCKzd64nB6F_q4Fy`

Ilustración



Estimación Puntual

Suponga que se desea estimar un parámetro $(\mu,\ \sigma^2,\ p)$ de interés de una sola población con base en una muestra aleatoria de tamaño n de esta población.

Si $X_1, \cdots, X_n$ es una m.a de dicha población, entonces cada X_i es una v.a. y cualquier estadístico deducido a partir de esta muestra será también una v.a.

Así los estimadores $\bar{X}$, S^2 y $\hat{p}$ serán variables aleatorias.

Estimación puntual

- El objetivo de la estimación puntual es emplear una m.a. para calcular un número que sea una buena presunción del parámetro de interés θ.
- El estimador puntual se denota como $\hat{\theta}$.
- El número resultante se llama estimación puntual.

Estimación puntual

Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2.
Tres estimadores puntuales para μ son:

$$\bar{X}\,, \quad \tilde{X} : \text{Mediana}\,, \quad \hat{\mu}_1 = \frac{min + max}{2}$$

Cuatro estimadores puntuales para σ^2 son:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2, \quad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2,$$

$$DM = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \tilde{X}\right)^2, \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{4}\,\text{Rango}\,.$$

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, a medida que el tamaño de la muestra crece, se espera que $\hat{\theta}$ esté muy cerca de θ.

Los valores de $\hat{\theta}$ cambian de muestra a muestra; así,

$$\hat{\theta} = \theta + \text{Error} \quad \text{Error de estimación} .$$

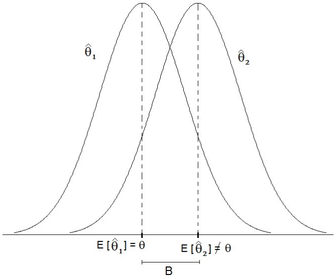
Insesgamiento de un estimador

Se dice que un estimador puntual $\hat{\theta}$ de θ (parámetro poblacional) es **insesgado** si

$$E\left[\hat{\theta}\right] = \theta\,.$$

En caso contrario diremos que el estimador es **sesgado.** Si $\hat{\theta}$ es sesgado, el sesgo se define como:

$$B = E\left[\hat{\theta}\right] - \theta\,.$$



Ver el video: `https://youtu.be/KQw1WEn1Jus?si=4fjpLYy5eT21-uN8`

Ejemplo de un estimador insesgado y uno sesgado

Suponga que $X \sim bin(n\,,\,p)$ con p desconocida. Considere los siguientes estimadores para p:

$$\hat{p}_1 = \frac{X}{n} \quad \hat{p}_2 = \frac{X+1}{n+1}\,.$$

¿Cual de los dos estimadores es insesgado?

<u>Solución:</u>

$$E\left[\hat{p}_1\right] = E\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n}\,E\left[X\right] = \frac{1}{n}np = p$$

$$E\left[\hat{p}_2\right] = E\left[\frac{X+1}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}\,E\left[X+1\right] = \frac{n\,p+1}{n+1}$$

$\hat{p}_1$ es insesgado y $\hat{p}_2$ es sesgado para p.

El sesgo de $\hat{p}_2$ está dado por: $B = E\left[\hat{p}_2\right] - p = \dfrac{1-p}{n+1}$.

Ejemplo de dos estimadores insesgados

Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2, entonces $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ son estimadores insesgados para μ y σ^2 respectivamente.

Demostración

Debemos calcular $E(\bar{X})$ y $E(S^2)$.

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n\mu}{n} = \mu\,.$$

Antes de calcular $E(S^2)$ necesitamos lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\,X_i\,\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\,n\,\bar{X}^2 + n\,\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\,\bar{X}^2\,.$$

Así

$$E\left[S^2\right] = \frac{1}{n-1}\, E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\,\bar{X}^2\right] = \frac{1}{n-1}\,\left(\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i^2\right] - n\,E\left[\bar{X}^2\right]\right)\,.$$

Como

$$E\left[X_i^2\right] = Var\left[X_i\right] + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2 \quad \text{y} \quad E\left[\bar{X}^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\,.$$

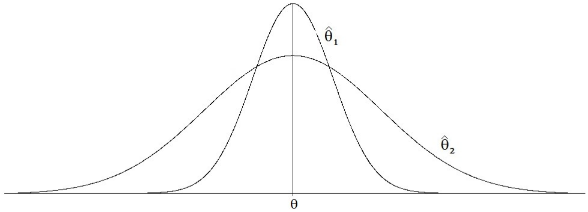
Entonces:

$$\begin{aligned} E\left[S^2\right] &= \frac{1}{n-1}\,\left[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\,\left(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2\right) = \frac{(n-1)\,\sigma^2}{n-1} = \sigma^2\,. \end{aligned}$$

En conclusión, los estimadores $\bar{X}$ y S^2 son insesgados para la media μ y varianza σ^2 de una población cualquiera.

Estimador Insesgado de Mínima Varianza (MVUE)

Entre dos estimadores insesgados para θ, se prefiere aquel con menor varianza.



Del gráfico se deduce que ambos estimadores para θ son insesgados. También se evidencia que $Var\left[\hat{\theta}_1\right] < Var\left[\hat{\theta}_2\right]$, por lo tanto $\hat{\theta}_1$ es mejor estimador de θ que $\hat{\theta}_2$.

De todos los estimadores insesgados para un parámetro θ, el de menor varianza es llamado Estimador Insesgado de Mínima Varianza (MVUE).

Ver el video: `https://youtu.be/jd9Mcrt7SiE?si=0zXjcl0RtdFFKJcs`

Ejemplo de mejor estimador

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2 conocida.
Sean
$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_n}{3} \quad \text{y} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{2X_1 - X_n + 2X_4 + X_{10}}{4}.$$
¿Cuál es mejor estimador? ¿$\hat{\mu}_1$ o $\hat{\mu}_2$?

Solución:

Calculemos los valores esperados de los dos estimadores.

$$E[\hat{\mu}_1] = \frac{1}{3} E[X_1 + X_2 + X_n] = \frac{\mu + \mu + \mu}{3} = \mu$$

$$E[\hat{\mu}_2] = \frac{1}{4} E[2X_1 - X_n + 2X_4 + X_{10}] = \frac{1}{4}(2\mu - \mu + 2\mu + \mu) = \frac{4\mu}{4} = \mu$$

Ahora vamos a calcular sus varianzas.

$$Var\,[\hat{\mu}_1] = \frac{1}{9}\,V\,[X_1 + X_2 + X_n] = \frac{1}{9}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2\right) = \sigma^2/3$$

$$\begin{aligned} Var\,[\hat{\mu}_2] &= \frac{1}{16}\,Var\,[2\,X_1 - X_n + 2\,X_4 + X_{10}] \\ &= \frac{1}{16}\left(4\,\sigma^2 + \sigma^2 + 4\,\sigma^2 + \sigma^2\right) = \frac{5}{8}\,\sigma^2 \end{aligned}$$

Como $Var\,[\hat{\mu}_1] < Var\,[\hat{\mu}_2]$, podemos concluir que $\hat{\mu}_1$ es mejor estimador que $\hat{\mu}_2$ para estimar a μ.

Propiedad importante

Teorema

Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una $N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\bar{X}$ es el MVUE para μ y $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ es el MVUE para σ^2.

Error estándar o standard error (se)

Definición

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, el *Error Estándar de* $\hat{\theta}$ será su desviación estándar, es decir,

$se(\hat{\theta}) = \sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{Var\left[\hat{\theta}\right]}$.

Si $se(\hat{\theta})$ depende de algún otro parámetro desconocido, éste debe ser estimado previamente y así, se obtiene una estimación del error estándar de $\hat{\theta}$.

Error estándar o standard error (se)

Al error estándar de $\hat{\theta}$ se le suele denotar como $\sigma_{\hat{\theta}}$ ó $S_{\hat{\theta}}$, cuando se deba realizar previamente alguna estimación.

Ejemplo de error estándar de $\bar{X}$

¿Cuál es el error estándar para el estimador $\bar{X}$ de la media de una población con media μ y varianza σ^2?

Solución:

En la clase anterior vimos que para una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2:

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n\mu}{n} = \mu\,. \tag{1}$$

$$Var\left[\bar{X}\right] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left[X_i\right] = \frac{\sigma^2}{n}\,. \tag{2}$$

Así, el error estándar de $\bar{X}$, está dado por $\sigma_{\bar{X}} = S_{\bar{X}} = \sqrt{Var\left[\bar{X}\right]} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Si σ es desconocida, ella se puede estimar como la desviación estándar muestral S.

Ejemplo de error estándar de $\hat{p}$

Suponga que $X \sim bin(n\,,\,p)$, con p desconocido. Un estimador para p es $\hat{p} \;=\; \dfrac{X}{n}$.
¿Cuál es el error estándar de $\hat{p}$.
<u>Solución:</u>

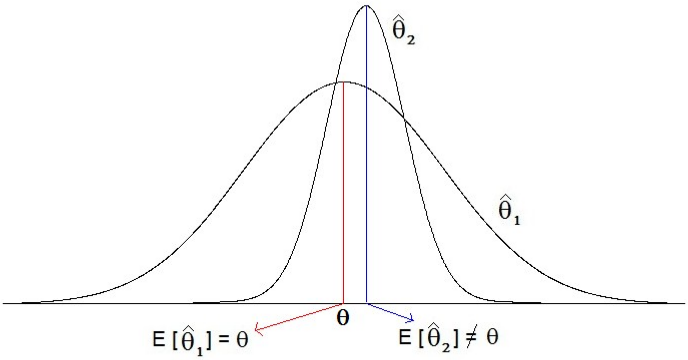
$$Var\,[\hat{p}] = Var\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n^2}Var[X] = \frac{1}{n^2}np(1-p) \;=\; \frac{p\,(1-p)}{n}$$

Como p se estima usando $\hat{p} \;=\; \dfrac{X}{n}$, el error estándar de $\hat{p}$ sería:

$$\hat{\sigma}_{\hat{p}} \;=\; S_{\hat{p}} = \sqrt{Var(\hat{p})} = \sqrt{\frac{\frac{X}{n}\,\left(1-\frac{X}{n}\right)}{n}}\;.$$

Error cuadrático medio

Suponga ahora que se desea establecer cual de dos estimadores de un parámetro θ es mejor:



De la figura anterior se observa que $\hat{\theta}_1$ es insesgado para θ pero $\hat{\theta}_2$ no. Sin embargo se observa que $V\left[\hat{\theta}_2\right] < V\left[\hat{\theta}_1\right]$. ¿Que hacer?

Una medida más general para comparar estimadores de θ es el *Error Cuadrático Medio* (*ECM*), el cual se define como:

$$ECM(\hat{\theta}) = Var\left[\hat{\theta}\right] + B^2 .$$

Entre dos estimadores elegimos aquel con menor *ECM*.

Ejemplo

Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media $\theta = 2$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Considere dos estimadores de θ, dados por:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{4\,X_1 + X_n}{5} \quad \text{y} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\,.$$

¿Cuál es mejor estimador de θ?

<u>Solución:</u>

Paso 1: calculemos los valores esperados de cada estimador.

$$E\left[\hat{\theta}_1\right] = E\left[\frac{4X_1 + X_n}{5}\right] = \frac{1}{5}\left\{4E[X_1] + E[X_n]\right\} = \frac{4\theta + \theta}{5} = \theta\,.$$

$$E\left[\hat{\theta}_2\right] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + 3X_n}{10}\right] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + 3E[X_n]}{10} = \frac{\theta + \theta + 3\theta}{10} = \frac{1}{2}\theta\,.$$

Así, $\hat{\theta}_1$ es insesgado y $\hat{\theta}_2$ es sesgado. El sesgo de $\hat{\theta}_1$ es cero y el sesgo de $\hat{\theta}_2$ es $B_2 = E\left[\hat{\theta}_2\right] - \theta = -\frac{\theta}{2}$.

Paso 2: calculemos las varianzas.

$$Var\left[\hat{\theta}_1\right] = Var\left[\frac{4\,X_1 + X_n}{5}\right] = \frac{1}{5^2}\,\{16\,Var[X_1] + Var[X_n]\}$$

$$= \frac{1}{25}\left\{16\,\sigma^2 + \sigma^2\right\} = \frac{17}{25}\,\sigma^2\,.$$

$$Var\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{1}{100}\,\{Var[X_1] + Var[X_2] + 9\,Var[X_n]\}$$

$$Var\left[\hat{\theta}_2\right] = \frac{11}{100}\,\sigma^2\,.$$

Observe que $Var\left[\hat{\theta}_2\right] < Var\left[\hat{\theta}_1\right]$.

Paso 3: calculemos el ECM:

$$ECM\left[\hat{\theta}_1\right] = Var\left[\hat{\theta}_1\right] + B_1^2 = \frac{17}{25}\sigma^2 + 0^2 = \frac{17}{25}\sigma^2 \,.$$

$$ECM\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\hat{\theta}_2\right] + B_2^2 = \frac{11}{100}\sigma^2 + \left(-\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{11}{100}\sigma^2 + \frac{\theta^2}{4} \,.$$

Como $\sigma^2 = 1$ y $\theta = 2$ los *ECM* serían $ECM\left[\hat{\theta}_1\right] = \frac{17}{25}$ y $ECM\left[\hat{\theta}_2\right] = \frac{11}{100} + 1$.

Al comparar los *ECM* vemos que $ECM\left[\hat{\theta}_1\right] < ECM\left[\hat{\theta}_2\right]$, se puede concluir que $\hat{\theta}_1$ es mejor estimador que $\hat{\theta}_2$.

Ejercicio

Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Poisson con parámetro λ desconocido. Considere dos estimadores de λ, dados por:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right].$$

a. Determine si ambos estimadores son insesgados para λ.

b. ¿Cúal de los dos estimadores para λ tiene menor varianza?.

c. Si $n = 25$ y $\lambda = 4$, ¿cúal de los dos estimadores prefiere?.