Clase 9: Distribuciones de probabilidad conjuntas (discretas y continuas), marginales y condicionales

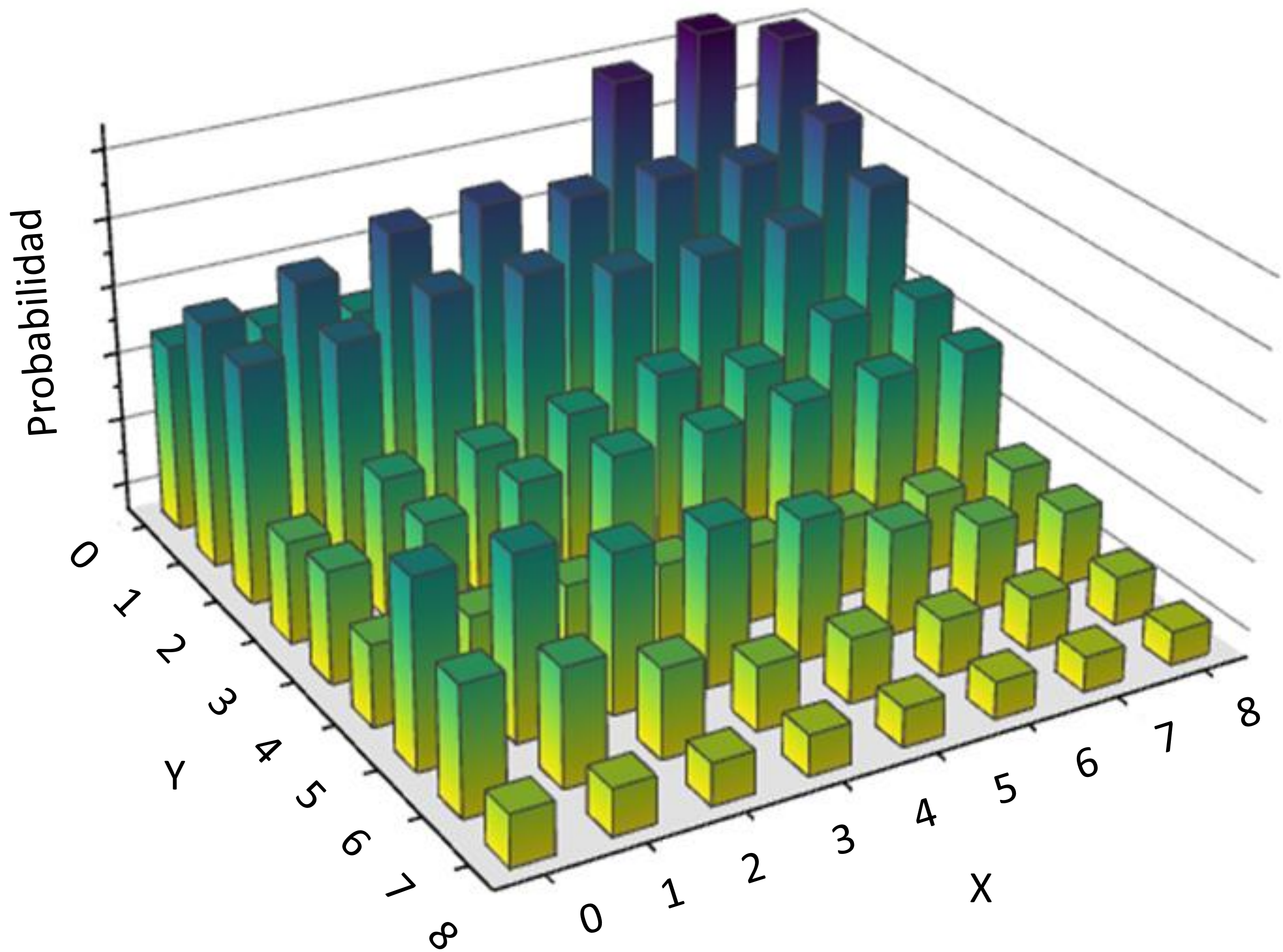
Profesora: Olga Alexandra Bustos Giraldo

Escuela de Estadística

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

oabustos@unal.edu.co

Ilustración de una distribución bivariada discreta



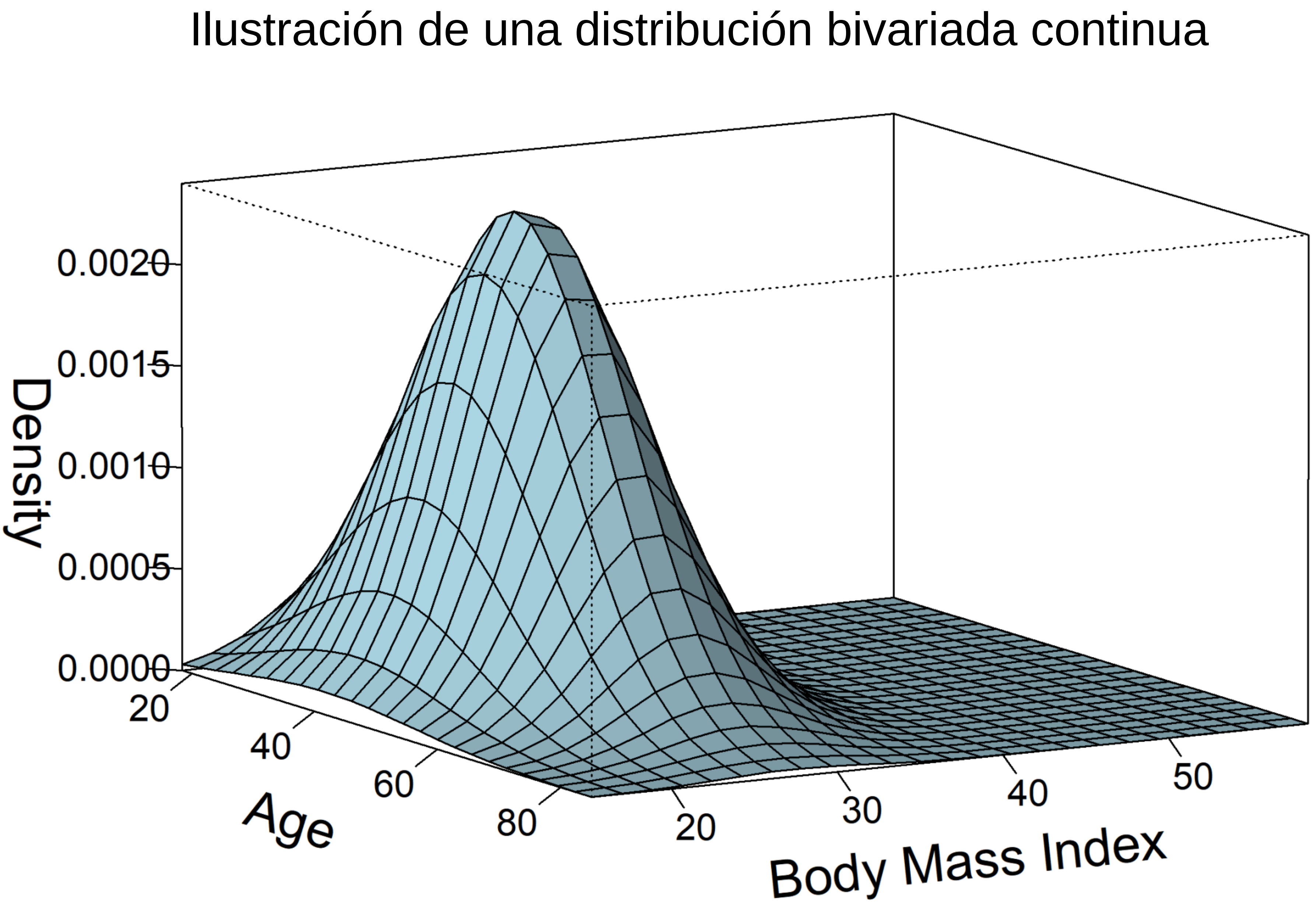


Ilustración de una distribución bivariada continua
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0.0000
Density
20
40
60
80
Age
20
30
40
50
Body Mass Index

Distribuciones Bivariadas

Muchos de los fenómenos que usualmente estudiamos, involucran diferentes y diversos factores, los cuales son identificados por medio de variables. El comportamiento de estos fenómenos se rige por el comportamiento conjunto de las variables involucradas.

Si X e Y son variables aleatorias, la distribución que rige el comportamiento conjunto de ambas variables es llamada DISTRIBUCIÓN BIVARIADA o BIVARIABLE. Si se tienen más de dos variables se le llama MULTIVARIABLE.

Distribuciones Bivariadas Discretas

Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas en un espacio muestral S y sea $\mathcal{A}$ el espacio de las variables (X, Y). La distribución de probabilidad conjunta de X e Y (la f.m.p. conjunta), la cual denotamos $p(x\ ,\ y)$, se define como:

$$p(x, y) \ := \ P(X = x, Y = y) \quad , \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Para que p(x,y) sea f.m.p.c debe satisfacer:

1. $p(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A}$
2. $\sum_x \sum_y p(x, y) = \sum_{(x, y) \in \mathcal{A}} p(x, y) = 1$
3. Si $A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad P((X, Y) \in A) = \sum_{(x\ ,\ y) \in A} p(x, y)$

Ejemplo Bivariadas

Sean X e Y dos v.a.s discretas con f.m.p. conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
$p(x\,,\,y)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

Calcule

a. $P(X \leq 1\,,\,Y \leq 1)$

b. $P(X > 1\,,\,Y < 2)$

c. $P(X = 0\,|\,Y = 1)$

Otra forma alternativa de presentar la f.m.p.

	$p(x,y)$	Y: 0	Y: 1
X	0	$1/18$	$3/18$
	1	$4/18$	$3/18$
	2	$6/18$	$1/18$

Ejemplo Bivariadas

Solución

a. Sea $A = \{(x, y) \mid x \leq 1, y \leq 1\}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 1, Y \leq 1) &= P((X, Y) \in A) \\
&= \sum_{(x,y) \in A} p(x, y) = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} p(x, y) \\
&= p(0, 0) + p(0, 1) + p(1, 0) + p(1, 1) = \frac{11}{18}
\end{aligned}
$$

Ejemplo Bivariadas

b. Sea $B = \{(x\,,\,y)\,/\,x > 1\,,\,y < 2\}$.

$$P(X > 1\,,Y < 2) = P((X\,,\,Y) \in B) = \sum_{x=2}^{2}\sum_{y=0}^{1} p\,(x\,,\,y)$$

$$= p\,(2\,,\,0) + p\,(2\,,\,1) = \frac{7}{18}$$

c.

$$P\,(X = 0\,|\,Y = 1) = \frac{P\,(X = 0\,,\,Y = 1)}{P\,(Y = 1)}$$

$$= \frac{p\,(0\,,\,1)}{p\,(0\,,\,1) + p\,(1\,,\,1) + p\,(2\,,\,1)}$$

$$= \frac{3\,/\,18}{3\,/\,18 + 3\,/\,18 + 1\,/\,18} = \frac{3}{7}$$

Variables aletorias Continuas

Sean X e Y variables aleatorias continuas definidas en $\mathcal{A}$ (espacio de las variables), diremos que $f(x,y)$ es una función de densidad de probabilidad conjunta (f.d.p.c), si satisface que:

Variables aletorias Continuas

Propiedades

1. $$f(x\,,\,y)\;\geq\;0.\quad\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx\;=\;1\;.$$

3. Si $B\;\subseteq\;\mathbb{R}^2\quad\Rightarrow$ $$P\left((X\,,Y)\;\in\;B\right)\;=\;\iint_B f(x,y)\,dy\,dx$$

Ejemplo Bivariadas

Sean X, Y v.a. continuas con f.d.p. conjunta dada por:

$$f(x,y) = c(x+y) \quad ; \quad 0 < x < 3 \quad , \quad x < y < x+2 \quad .$$

a. Halle el valor de c, para que f sea una f.d.p. conjunta

b. Calcule $P(X < 1, Y < 2)$.

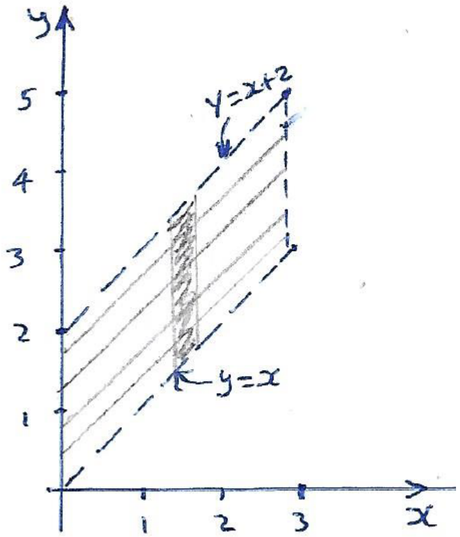
c. Calcule $P(1 < X < 2)$.

d. Calcule $P(X < 2 | Y > 2)$.

Ejemplo Bivariadas

Solución

a. Para hallar el valor de c, se debe dibujar la región de integración así:



$$\int_0^3 \int_x^{x+2} c(x+y)\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^3 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_x^{x+2} dx = 1$$

Ejemplo Bivariadas

$$c\int_0^3\left[x(x+2)+\frac{(x+2)^2}{2}-x^2-\frac{x^2}{2}\right]dx=1\Leftrightarrow c\int_0^3\left[x^2+2x+\frac{x^2+4x+4}{2}-\frac{3x^2}{2}\right]dx=1$$

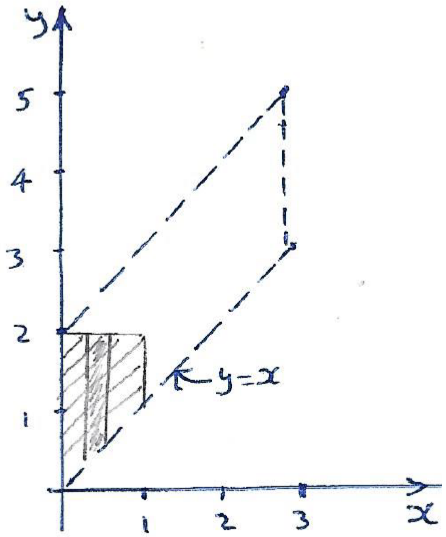
$$\Leftrightarrow c\int_0^3(4x+2)\,dx=1\ \Leftrightarrow c\left(2x^2+2x\right)\Big|_0^3=1\Leftrightarrow\quad 24c=1$$

Luego, $c=\frac{1}{24}$, con esto

$$f(x,y)=\frac{x+y}{24}\quad;\quad 0<x<3\quad,\quad x<y<x+2\quad.$$

Ejemplo Bivariadas

b. Para hallar $P(X < 1, Y < 2)$, se debe dibujar la región de integración así:



$$P(X < 1, Y < 2) = \int_0^1 \int_x^2 \frac{1}{24}(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{24}\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^2 dx\,.$$

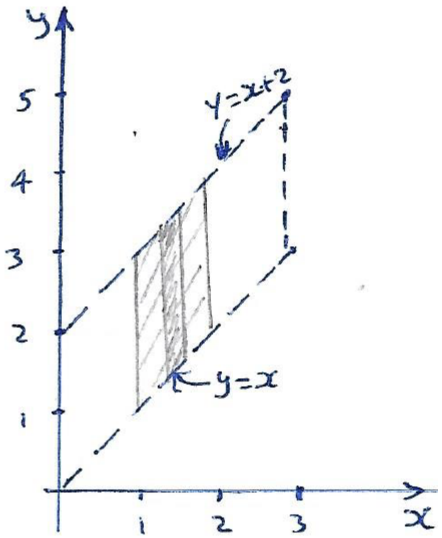
Ejemplo Bivariadas

$$P(X < 1\,, Y < 2) = \int_0^1 \frac{1}{24}\left(2x + 2 - x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{24}\left(2x + 2 - \frac{3x^2}{2}\right) dx\,.$$

$$P(X < 1\,, Y < 2) = \frac{1}{24}\left(x^2 + 2x - \frac{x^3}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{24}\left(1 + 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{48}\,.$$

Ejemplo Bivariadas

c. Para hallar $P(1 < X < 2)$, se debe dibujar la región de integración así:

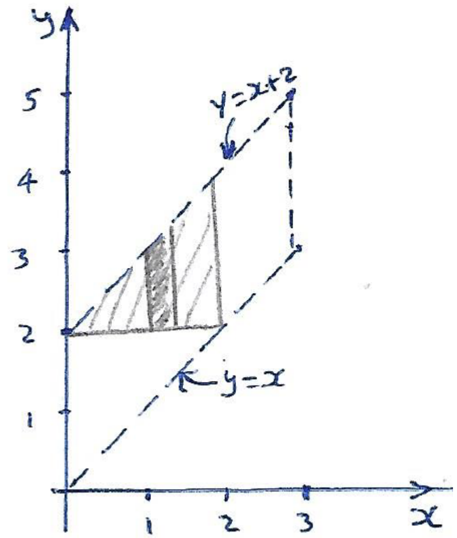


$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \int_x^{x+2} \frac{x+y}{24} dy\,dx = \frac{1}{24} \int_1^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_x^{x+2} dx$$

$$P(1 < X < 2) = \frac{1}{24} \int_1^2 (4x+2)\, dx = \frac{1}{24} \left[2x^2 + 2x \right]\Big|_1^2 = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo Bivariadas

d. Para hallar $P\left(X < 2 \middle| Y > 2\right)$, se debe dibujar la región de integración así:



Ejemplo Bivariadas

$$P(X<2|Y>2)=\frac{P(X<2,Y>2)}{P(Y>2)}$$

$$=\frac{\int_0^2\int_2^{x+2}\frac{1}{24}(x+y)\,dy\,dx}{1-P(Y\leq 2)}$$

$$=\frac{1/3}{1-\int_0^2\int_x^2\frac{1}{24}(x+y)\,dy\,dx}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{2}{5}$$

Marginales y Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas).

La *Distribución Marginal de X*, está dada por:

$$p_X(x) = \sum_y p(x,y) \quad , \quad \text{Caso Discreto .}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad , \quad \text{Caso Continuo .}$$

Analógamente se define la *Distribución Marginal de Y* como:

$$p_Y(y) = \sum_x p(x,y) \quad , \quad \text{Caso Discreto .}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \quad , \quad \text{Caso Continuo .}$$

Marginales y Condicionales

La *Distribución Condicional* de "Y dado $X = x$" la cual se denotará: $p_{Y\,|\,x}(y), f_{Y\,|\,x}(y)$, y se define como:

$$p_{Y\,|\,x}(y) = \frac{p\,(x\,,\,y)}{p_X(x)} \quad , \quad p_X(x) > 0\,.$$

$$p_{X\,|\,y}(x) = \frac{p\,(x\,,\,y)}{p_Y(y)} \quad , \quad p_Y(y) > 0\,.$$

$$f_{Y\,|\,x}(y) = \frac{f\,(x\,,\,y)}{f_X(x)} \quad , \quad f_X(x) > 0\,.$$

$$f_{X\,|\,y}(x) = \frac{f\,(x\,,\,y)}{f_Y(y)} \quad , \quad f_Y(y) > 0\,.$$

De lo anterior se deduce que:

$$\boxed{f\,(x\,,\,y) = f_X(x)\,f_{Y\,|\,x}(y) \; = \; f_Y(y)\,f_{X\,|\,y}(x)}$$

Ejemplo Marginales y Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias discretas con f.m.p. conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
$p(x,y)$	$1/18$	$3/18$	$4/18$	$3/18$	$6/18$	$1/18$

Halle $p_X(x)$, $p_Y(y)$, $p_{Y\,|\,x}(y)$

Ejemplo Marginales y Condicionales

Solución

		Y		
	$p(x,y)$	0	1	$p_X(x)$
X	0	$1/18$	$3/18$	$4/18$
	1	$4/18$	$3/18$	$7/18$
	2	$6/18$	$1/18$	$7/18$
	$p_Y(y)$	$11/18$	$7/18$	1

Distribución marginal de X

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{1} p(x,y) = p(x,0) + p(x,1) \quad ; \quad \text{para } x = 0, 1, 2 .$$

x	0	1	2
$p_X(x)$	$4/18$	$7/18$	$7/18$

Distribución marginal de Y

$$p_Y(y) = \sum_{x=0}^{2} p(x,y) = p(0,y) + p(1,y) + p(2,y) \quad ; \quad \text{para } y = 0,\, 1\ .$$

y	0	1
$p_Y(y)$	$11/18$	$7/18$

Ejemplo Marginales y Condicionales

La distribución condicional de Y dado x, se obtiene como:

$$p_{Y\,|\,x}(y) = \frac{p\,(x\,,\,y)}{p_X(x)} \quad ; \quad \text{para} \quad y = 0, 1$$

Por ejemplo, para $x = 0$ se tiene que:

$$p_{Y\,|\,0}(y) = \frac{p\,(0\,,\,y)}{p_X(0)} = \frac{p\,(0\,,\,y)}{\frac{4}{18}} \quad ; \quad \text{para} \quad y = 0, 1\ .$$

La distribución resultante se muestra en la siguiente tabla.

y	0	1
$p_{Y\,|\,0}(y)$	$1/4$	$3/4$

Dado que X=0

Ejemplo Marginales y Condicionales

De manera análoga se hayan las distribuciones condicionales de Y dado $x = 1$ y $x = 2$.

Estas se muestran a continuación.

y	0	1	y	0	1
$p_{Y\|1}(y)$	$4/7$	$3/7$	$p_{Y\|2}(y)$	$6/7$	$1/7$

Dado que X=1 Dado que X=2

Ejemplo Marginales y Condicionales

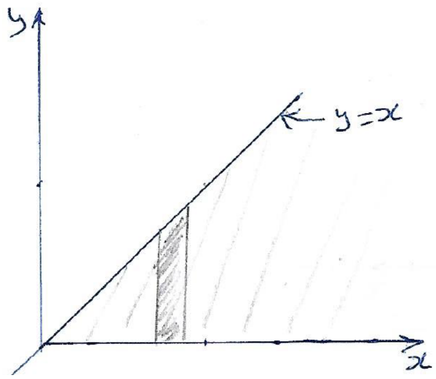
Sean X e Y variables aleatorias continuas con f.d.p conjunta dada por:

$$f(x,y) = e^{-x} \quad ; \quad 0 \le y < x \, .$$

Calcule las distribuciones marginales y las condicionales.

Solución

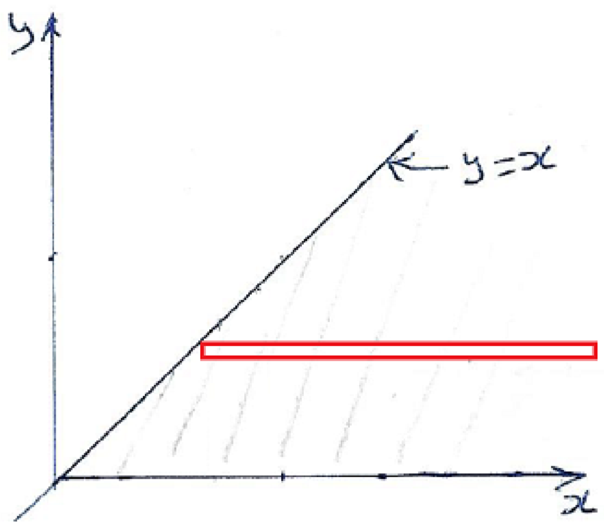
La distribución marginal de X



$$f_X(x) = \int_0^x e^{-x} dy = \left(y e^{-x} \right)\Big|_0^x = x\, e^{-x} \quad , \quad x > 0 \, .$$

Ejemplo Marginales y Condicionales

La distribución marginal de Y



$$f_Y(y) = \int_y^{+\infty} e^{-x} dx = \left(-e^{-x}\right)\Big|_y^{\infty} = e^{-y} \quad , \quad y > 0 \, .$$

Las distribuciones condicionales:

$$f_{Y\,|\,x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-x}}{x\,e^{-x}} = \frac{1}{x} \quad ; \quad 0 < y < x \, .$$

$$f_{X\,|\,y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-x}}{e^{-y}} = e^{-(x-y)} \quad ; \quad x > y \, .$$

Variables Independientes

Definición

Sean X e Y variables aleatorias, diremos que X e Y son *Estadísticamente Independientes* (E.I.), si:

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad , \quad \forall (x,y) \in \mathcal{A}\,.$$

$$p(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y) \quad , \quad \forall (x,y) \in \mathcal{A}\,.$$

Si existe un par (x,y), para el cual la igualdad no es cierta, diremos que X e Y son *Estadísticamente Dependientes*.

Ejemplo Variables Independientes

Sean X e Y variables aleatorias discretas con f.m.p. conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
$p(x,y)$	$1/18$	$3/18$	$4/18$	$3/18$	$6/18$	$1/18$

¿Son X e Y estadísticamente independientes?

Ejemplo Variables Independientes

Solución

Las distribuciones marginales para X e Y son, respectivamente:

Distribución marginal de X

x	0	1	2
$p_X(x)$	$4/18$	$7/18$	$7/18$

Distribución marginal de Y

y	0	1
$p_Y(y)$	$11/18$	$7/18$

Observe que:

$$p(0,0) = \frac{1}{18} \quad , \quad p_X(0) = \frac{4}{18} \quad \text{y} \quad p_Y(0) = \frac{11}{18} \, .$$

Con lo cual se muestra que $p(0,0) \neq p_X(0)\, p_Y(0)$ y por lo tanto, X e Y no son E.I.

Ejemplo Variables Independientes

Sean X y Y variables aleatorias continuas con f.d.p. conjunta dada por:

$$f(x,y) = 4x(1-y) \quad ; \quad 0 < x < 1 \,,\, 0 < y < 1 \,.$$

Verifique que X e Y son v.a. estadísticamente independientes

Solución

$$f_X(x) = \int_0^1 4x(1-y)dy = 4x\left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 4x\left(\frac{1}{2}\right) = 2x, \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4x(1-y)dx = 2x^2(1-y)\Big|_0^1 = 2(1-y), \quad 0 < y < 1$$

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad ; \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,$$

es decir, X y Y son E.I.

Ejercicio

Sean X y Y variables aleatorias continuas con f.d.p. conjunta dada por:

$$f(x,y) = 24xy \quad ; \quad 0 < x < 1\,,\, 0 < y < 1,\, x+y \leq 1$$

hallar las marginales para X e Y, $\quad f_{X|Y=\frac{1}{2}}(x), \quad f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y)$