Clase 4: Variables aleatorias continuas y funciones de densidad de probabilidad. Valor Esperado de una variable aleatoria (discreta y continua)

Profesora: Olga Alexandra Bustos Giraldo

Escuela de Estadística

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

oabustos@unal.edu.co

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria se dice continua si el rango de dicha variable es un intervalo de números reales. Por ejemplo, medición de la corriente de un alambre, longitud de partes desgastadas en una pieza, tiempo de duración de una bombilla, tiempos de espera, estatura, masa.

Distribución de probabilidad de v.a continuas

Definición

Sea X una variable aleatoria continua. La distribución de probabilidad o función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de X, denotada por $f(x)$, es tal que:

1. $f(x) \geq 0 \;\; ; \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

$P(X \in A) = \int\limits_{A} f(x)\, dx.$

Si $A = [a, b]$ con $a < b$, entonces $P(a \leq X \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$.

Función de Distribución Acumulada

Definición

Sea X una variable aleatoria continua. La función de distribución acumulada para la variable aleatoria X, se define igual que en el caso discreto.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \,.$$

$F(x)$ es llamada *Función de distribución acumulada* o f.d.a.

Función de Distribución Acumulada

Propiedades de $F(x)$

1. $0 \leq F(x) \leq 1\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Función de Distribución Acumulada

Si $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, entonces

- $P(X = a) = 0 \quad (\int_a^a f(x)\,dx = 0)$

- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$
  $= F(b) - F(a)$

- $P(X > a) = P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

Ejemplo de V.A. Continuas

La f.d.a. para la v.a X: tiempo en horas del préstamo de un libro, es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & ; \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcule $P(X < 1)$.

b) Calcule $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$.

c) Halle $f(x)$.

Ejemplo de V.A. Continuas

Solución

a) $P(X<1)=F(1)=\frac{1}{4}$

b) $P\left(\frac{1}{2}<X<1\right)=F(1)\;-\;F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\;-\;\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$

d) $f(x)=F'(x)=\dfrac{2x}{4}=\dfrac{x}{2}\,;\quad 0<x<2.$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & , \quad 0<x<2\\ 0 & , \quad \text{otro caso}\end{cases}$$

Ejemplo de V.A. Continuas

Sea X la duración en horas de cierto tipo de bombilla eléctrica. La f.d.p. para X esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^3} & , \quad 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Calcule:

a) $P(X \leq 2000)$

b) $P(X \leq 2000 | X \geq 1800)$

Ejemplo de V.A. Continuas

Solución

Primero es necesario hallar el valor de a.

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

entonces

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{1500} f(x)\,dx}_{0} + \int_{1500}^{2500} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{2500}^{+\infty} f(x)\,dx}_{0} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{1500}^{2500} \frac{a}{x^3}dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\left.\frac{a}{2x^2}\right|_{1500}^{2500} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 7031250\,.$$

Ejemplo de V.A. Continuas

a) $P(X \leq 2000) = \int_{1500}^{2000} \frac{a}{x^3} dx = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{1500^2} - \frac{1}{2000^2}\right] \cong 0.68359$.

b) $P(X \leq 2000 | X \geq 1800) = \dfrac{P(1800 \leq X \leq 2000)}{P(X \geq 1800)} = \dfrac{\int_{1800}^{2000} \frac{a}{x^3} dx}{\int_{1800}^{2500} \frac{a}{x^3} dx} \approx 0.39452$

Ejemplo de V.A. Continuas

El tiempo de espera de un cliente hasta ser atendido es una variable aleatoria continua con f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad \text{x} > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Halle $F(x)$

b) Calcule $P(X < 1)$

c) Calcule $P(1 < X < 2)$

d) Halle el valor de k, tal que $P(X < k) = 0.95$

Solución de V.A. Continuas

a) Si $x \leq 0$ entonces $F(x) = 0$.

Si $x > 0$ entonces $F(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^x = 1 - e^{-x}$. $F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & ; \quad x > 0 \end{cases}$

b) $P(X < 1) = P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \dfrac{e-1}{e} \cong 0.63212$.

c) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \left(1 - e^{-2}\right) - \left(1 - e^{-1}\right) \cong 0.23254$

d) $P(X < k) = F(k) = 1 - e^{-k} = 0.95 \Leftrightarrow e^{-k} = 0.05 \quad \Rightarrow \quad k = 2.99573$.

Valor Esperado de una V.A.

Sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua), con f.m.p. $p(x)$ o f.d.p. $f(x)$. El valor esperado de X, el cual se denota $E[X]$, se define como:

$$E[X] = \begin{cases} \sum\limits_{x \in A_X} x\, p(x) & ; \quad \text{Si X es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx & ; \quad \text{Si X es continua} \end{cases}$$

Este valor esperado es usualmente denotado μ_X, o μ. Es el promedio o la media de los datos.

Propiedades del Valor Esperado

Sean a, b números reales y sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua).

1. $E[a] = a$

2. $E[aX + b] = aE[X] + b$

3. Si $g(X)$ es una función de X, entonces

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum\limits_{x \in A_X} g(x)\, p(x) & ; \quad \text{Si X es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx & ; \quad \text{Si X es continua} \end{cases}$$

4. $E[ah(x) + bg(x)] = aE[h(x)] + bE[g(x)]$

Varianza de una V.A.

La *Varianza* de una v.a X, la cual se denotará $Var[X]$, $V[X]$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, se define como:

$$Var[X] = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 .$$

Propiedades de la Varianza

Sean a, b números reales y sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua).

1. $Var[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$

2. $Var[a] = 0$

3. $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

A la raíz cuadrada de $Var[X]$ se le llamará *Desviación Estándar* de X y se denotará σ_x o σ. La varianza y la desviación estándar miden la dispersión de los datos.

Ejemplo de Valor Esperado y Varianza

La demanda semanal de gas propano (en millones de galones) de una distribuidora en particular es una variable aleatoria X con f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2\left[1 - \dfrac{1}{x^2}\right] & ; \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Halle la f.d.a para X

b) Calcule $E[X]$ y $Var[X]$

c) Si $H(X) = 1.5 - X$, halle $E[H(X)]$.
$H(X)$ puede verse como el remanente si no se recibe nuevo suministro.

Solución

a) Si $X < 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 0$
Si $1 \leq X \leq 2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 2\left[x + \frac{1}{x} - 2\right]$
Si $X > 2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1$

b) $E[X] = \int_1^2 2x\left[1 - \frac{1}{x^2}\right]dx = \int_1^2 \left(2x - \frac{2}{x}\right)dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \ln x\right|_1^2$

$E[X] = 3 - 2\ln 2 \approx 1.61$. Se espera en promedio 1.61 (millones de galones) de la demanda semanal del gas.

Para haller la $Var[X]$, se requiere hallar primero $E\left[X^2\right]$

$E\left[X^2\right] = \int_1^2 2x^2\left[1 - \frac{1}{x^2}\right]dx = \int_1^2 \left(2x^2 - 2\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x\right|_1^2 = \frac{8}{3}$

$Var[X] = E\left[X^2\right] - \mu_X^2 = \frac{8}{3} - (3 - 2\ln 2)^2 \cong 0.0626.$

Solución

La desviación estándar sería $\sqrt{0.0626} = 0,250$. Indica la variación de los datos alrededor de la media. En promedio la demanda semanal se encuentra $1,61 - 0,25 = 1,36 \quad y \quad 1,61 + 0,25 = 1,86$

c) $E[H(X)] = 1.5 - E[X] = 1.5 - 1.61 = -0.11$ ”no se puede cubrir la demanda”.

Ejemplo de Valor Esperado y Varianza

Una tienda de computadores ha comprado 3 computadores de cierto tipo a $\$500$ cada uno, los venderá a $\$1000$ cada uno. El fabricante ha aceptado volver a comprar en $\$200$ cada computador que no se haya vendido en un tiempo dado. Sea X= El número de computadores vendidos con f.m.p $(p(x))$.

X	0	1	2	3
$p(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

Ejemplo de Valor Esperado y Varianza

Hallar:

a) Utilidad esperada

b) Probabilidad de vender a lo sumo (como máximo) 2 computadores

c) Probabilidad de que como mínimo 2 computadores no sean vendidos

Solución

Definamos Y= La utilidad

a) $Y = 1000X + (3-X)200 - 3(500) = 1000X + 600 - 200X - 1500$
$Y = 800X - 900$
$E[Y] = E[800X - 900] = 800E[X] - 900$
$E[X] = \sum_{x=0}^{3} xp(x) = 0(0.1) + 1(0.2) + 2(0.3) + 3(0.4) = 2$
$E[Y] = 800(2) - 900 = 700$. En promedio se espera que la utilidad sea 700.

b) $P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} p(x) = p(0) + p(1) + p(2) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6$

c) Definamos W= Número de computadores no son vendidos, es decir: W=3-X

X	0	1	2	3
W	3	2	1	0
p	0.1	0.2	0.3	0.4

$$P(W \geq 2) = 1 - P(W < 2) = 1 - [p(0) + p(1)] = 1 - (0.4 + 0.3) = 0.3.$$

De otro modo:

$$P(W \geq 2) = p(2) + p(3) = 0.3$$