Clase 3: Variables Aleatorias. Definiciones básicas y ejemplos. Tipos de variables aleatorias. Variables aleatorias discretas y distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas

Profesora: Olga Aleandra Bustos Giraldo

Escuela de Estadística

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

oabustos@unal.edu.co

Variables Aleatorias

Una **Variable Aleatoria** es una función definida en un espacio muestral S que asigna a cada resultado de un experimento aleatorio un valor real. Usualmente son denotadas con letras mayúsculas como $(X\ ,\ Y\ ,\ Z\ ,\ T,$ etc$)$. En contraste se utilizará una letra minuscula tal como x para denotar un valor partícular de la variable

Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio muestral S.

$$\begin{aligned} X:\ S &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow X(s) = x\,, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Al conjunto de todos los posibles resultados de una variable aleatoria se le llamará *Rango* de la variable y es usualmente denotado A_X.

Ejemplo Variables Aleatorias

Tres monedas no cargadas son lanzadas al tiempo. Hallar el espacio muestral S y analice la variable aleatoria X: el # de caras en cada lanzamiento.

Solución

El espacio muestral está dado por:

$$S = \{CCC\,, CCS\,, CSC\,, SCC\,, CSS\,, SCS\,, SSC\,, SSS\}\ .$$

La variable aleatoria de interés es X: # caras en cada lanzamiento. En este caso los valores que se pueden observar de X, el número de caras son $\{0,1,2,3\}$. Si se denota por A_X el conjunto de todos los posibles valores que toma la v.a X, se tiene que $A_X = \{0,1,2,3\}$.

Ejemplo Variables Aleatorias

La función X asigna a cada resultado del espacio muestral un vaor real que pertenece a A_X, tal como se muestra a continuación:

$$X: \begin{array}{cccccccc} CCC & CCS & CSC & SCC & CSS & SCS & SSC & SSS \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} .$$

Es decir,

$$\begin{array}{rcl} X: \ S & \to & \mathbb{R} \\ s & \to & X(s) = x\,, \quad x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Por ejemplo,

$$X(CCC) = 3\,,\ X(SCC) = 2\,,\ X(SSS) = 0\,,\ X(SSC) = 1\,.$$

Ejemplo Variables Aleatorias

Se lanza un par de dados. Halle el espacio muestral y analice las variables aleatorias: X: suma de los 2 resultados y Y: diferencia entre los dos resultados.

Solución

El espacio muestral para este experimento es:

$$S = \{(1\ ,\ 1)\ ,\ (1\ ,\ 2)\ ,\ \ldots\ ,\ (5\ ,\ 6)\ ,\ (6\ ,\ 6)\}\ .$$

Para la variable aleatoria X, que corresponde a la suma de los dos resultados, la asignación para los diferentes pares de resultados se muestra así:

$$\begin{array}{llllllllllll} (1,1) & \rightarrow & 2 & , & (3,2) & \rightarrow & 5 & , & (4,3) & \rightarrow & 7 & \\ (1,2) & \rightarrow & 3 & , & (3,5) & \rightarrow & 8 & , & (6,2) & \rightarrow & 8 & \text{etc.} \\ (5,6) & \rightarrow & 11 & , & (6,6) & \rightarrow & 12 & , & (2,5) & \rightarrow & 7 & \end{array}$$

En este caso, el rango de la variable aleatoria X, está dado por

$$A_X = \{2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,7\ ,\ 8\ ,\ 9\ ,\ 10\ ,\ 11\ ,\ 12\}\ .$$

Ejemplo Variables Aleatorias

Para la variable aleatoria Y: Diferencia entre los dos resultados, se tiene que:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(1,1) & \rightarrow & 0 & , & (3,2) & \rightarrow & 1 & , & (4,2) & \rightarrow & 2 \\
(1,2) & \rightarrow & -1 & , & (3,5) & \rightarrow & -2 & , & (6,2) & \rightarrow & 4 \\
(1,6) & \rightarrow & -5 & , & (2,5) & \rightarrow & -3 & & & & \\
(1,5) & \rightarrow & -4 & , & (4,1) & \rightarrow & 3 & , & (6,1) & \rightarrow & 5
\end{array}$$

Así,

$$A_Y = \{-5\,,\ -4\,,\ -3\,,\ -2\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\}$$

Diferentes variables aleatorias implican rangos diferentes. Es importante resaltar que las variables aleatorias, en muchos casos, permiten reducir los resultados en un espacio muestral, a un conjunto de valores más pequeño.

Ejemplo Variables Aleatorias

En una gran población se encuestan de manera aleatoria sujetos hasta encontrar el primero que responde afirmativamente a una pregunta de interés. Si X es la variable aleatoria que cuenta el número de sujetos encuestados hasta encontrar el primero que responde afirmativamente, entonces el rango de X está dado por $A_X = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

El desgaste de una llanta en un período de un año es una variable aleatoria. Si X es la variable aleatoria que representa el desgaste en décimas de milímetros, $A_X = (0\ ,\ a)$, donde a representa el desgaste máximo de la llanta.

Variables Aleatorias

Estos 2 ejemplos representan variables aleatorias, las cuales son observadas en dos tipos de escalas que implican conteos o mediciones. A la primera se le conoce como Variable Aleatoria *Discreta*, a la segunda como Variable Aleatoria *Continua*. La diferencia principal entre ellas, es que para la primera, el rango es un conjunto contable (finito o numerable); en la segunda, el rango de la variable aleatoria forma un intervalo de números reales.

Cualquier v.a cuyos posibles valores son 0 y 1 recibe el nombre de Variable Aleatoria Bernoulli

Distribución de probabilidad de v.a discretas

La distribución de probabilidad de una v.a X, dice cómo está distribuida la probabilidad total de 1 entre los posibles valores de X. Se utilizará la siguiente notación para las probablidades: $p(x) = P(X = x)$. Si $x = 0$, entonces escribiremos $p(0) = P(X = 0) =$ La probabilidad cuando X toma el valor de 0.

En general, $p(x)$ denotará la probabilidad asignada al valor de x.

Distribución de probabilidad de v.a discretas

La distribución de probabilidad o **Función masa de Probabilidad** (**f.m.p.**) o (**p.m.f.**) de una v.a discreta X definida en un espacio muestral S, se denotará $p(x)$ y se define como:

$$p(x) = P(X = x) \quad ; \quad \forall x \in A_X \; .$$

Es decir, para cada valor posible x de la v.a, la f.m.p, especifica la posibilidad de observar dicho valor cuando se realiza el experimento.

Distribución de probabilidad de v.a discretas

Esta función p debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. $p(x) \geq 0 \ , \quad \forall x \in A_X$

2. $\sum_{x \in A_X} p(x) = 1$

3. Si $A \subseteq A_X$, entonces $P(X \in A) = \sum_{x \in A} p(x)$.

Ejemplo

Tres monedas no cargadas son lanzadas al tiempo. Sea X: el # de caras observadas, hallar la $f.m.p$ de X.

Solución

$A_X = \{0,1,2,3\}$

$$P(X=0) = P(\{SSS\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P(\{CSS, SCS, SSC\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = P(\{CCS, CSC, SCC\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = P(\{CCC\}) = \frac{1}{8}$$

Función de Distribución Acumulada

Sea X una v.a discreta con f.m.p. $p(x)$. La *Función de Distribución Acumulada* (f.d.a.) de X, denotada $F(x)$ se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x' \leq x} p(x')\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

$F(x)$= Suma de la probabilidades hasta el valor de x incluyendo la probabilidad en el valor de x.

Función de Distribución Acumulada

Propiedades de la Función de Distribución Acumulada

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. $P(X > x) = 1 - F(x)$.

3. Si $x < y \quad \Rightarrow \quad F(x) < F(y)$.

4. $p(x)$ representa el salto en el gráfico de $F(x)$ en el punto x.

Función de Distribución Acumulada

Si $a, b \in \mathrm{R}$

- $P(\mathrm{a} \leq X \leq \mathrm{b}) = F(\mathrm{b}) - F(\mathrm{a} - 1)$
- $P(\mathrm{a} < X \leq \mathrm{b}) = F(\mathrm{b}) - F(\mathrm{a})$
- $P(\mathrm{a} \leq X < \mathrm{b}) = F(\mathrm{b} - 1) - F(\mathrm{a} - 1)$
- $P(\mathrm{a} < X < \mathrm{b}) = F(\mathrm{b} - 1) - F(\mathrm{a})$
- $P(X < \mathrm{a}) = F(\mathrm{a} - 1)$

Función de Distribución Acumulada

- $P(X \leq \mathsf{a}) = F(\mathsf{a})$
- $P(X \geq \mathsf{a}) = 1 - P(X < \mathsf{a}) = 1 - F(a-1)$
- $P(X > \mathsf{a}) = 1 - P(X \leq \mathsf{a}) = 1 - F(a)$

Ejemplo

Se lanza un dado. Sea X: el resultado del lanzamiento del dado, halle la f.d.a. de X.

Solución

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A_X = \{1,2,3,4,5,6\}$

se tiene que:

$p(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ .$

Ejemplo

Ahora calculemos la Función de Distribución Acumulada:

$$Si\ x < 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 0$$
$$Si\ 1 \leq x < 2 \quad \Rightarrow \quad F(1) = 1/6$$
$$Si\ 2 \leq x < 3 \quad \Rightarrow \quad F(2) = 2/6$$
$$Si\ 3 \leq x < 4 \quad \Rightarrow \quad F(3) = 3/6$$
$$Si\ 4 \leq x < 5 \quad \Rightarrow \quad F(4) = 4/6$$
$$Si\ 5 \leq x < 6 \quad \Rightarrow \quad F(5) = 5/6$$
$$Si\ x \geq 6 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1$$

La distribución acumulada para X, puede escribirse como:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 1 \\ \dfrac{[\![x]\!]}{6} & ; \quad x \in [1, 6) \\ 1 & ; \quad x \geq 6 \end{cases}$$

Ejemplo

Suponga que una v.a X tiene f.m.p. dada por,

X	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

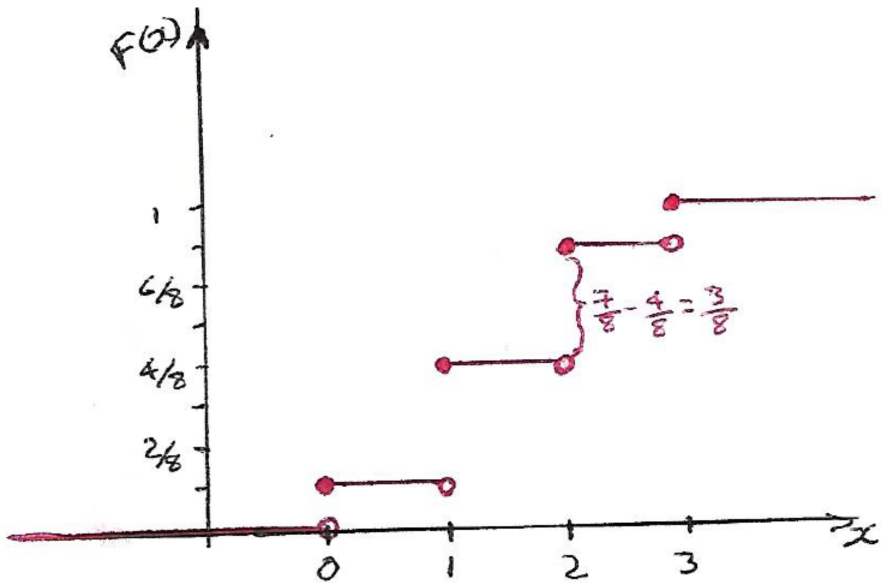
Halle la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X y grafíquela.

Ejemplo

Solución

$$
\begin{array}{llll}
\text{Si} & x < 0 & \text{entonces} & F(x) = 0 \\
\text{Si} & 0 \leq x < 1 & \text{entonces} & F(0) = \frac{1}{8} \\
\text{Si} & 1 \leq x < 2 & \text{entonces} & F(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \\
\text{Si} & 2 \leq x < 3 & \text{entonces} & F(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} \\
\text{Si} & x \geq 3 & \text{entonces} & F(3) = 1 \,.
\end{array}
$$

Ejemplo



En el gráfico de esta Función de Distribución Acumulada, la longitud del salto que da la función en $x = 2$ es exactamente igual a la probabilidad en ese punto.

Ejercicio

Ejercicio

Sea X una v.a. discreta, determinar el valor de k, para que la función

$p(x) = x/k,\ x = 1, 2, 3, 4$, sea la f.m.p. de X.

Halle $p(x)$, $F(x)$, y $P(1 \leq X \leq 3)$