Clase 2

Probabilidad condicional.
Regla multiplicativa.
Probabilidad total y Teorema de Bayes.
Independencia entre eventos.

Probabilidad condicional $P(A|B)$

Sean A y B definidos en S de manera que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de A dado B se denota por $P(A|B)$ y se define como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

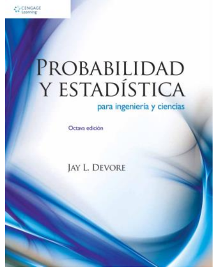
Probabilidad condicional $P(B|A)$

De manera similar, la probabilidad condicional de B dado A se denota por $P(B|A)$ y se define como

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Para esta probabilidad condicional también se requiere que la probabilidad del evento dado no sea nula.

Ejercicio 2.47 tomado de Devore (2012)



47. Regrese al escenario de la tarjeta de crédito del ejercicio 12 (sección 2.2), donde $A = \{\text{Visa}\}$, $B = \{\text{MasterCard}\}$, $P(A) = .5$, $P(B) = .4$ y $P(A \cap B) = .25$. Calcule e interprete cada una de las siguientes probabilidades (un diagrama de Venn podría ayudar).

a. $P(B \mid A)$ **b.** $P(B' \mid A)$

c. $P(A \mid B)$ **d.** $P(A' \mid B)$

Regla de la multiplicación

Sean A y B definidos en S. Usando las definiciones de probabilidad condicional se puede escribir la probabilidad de que ocurran simultáneamente A y B usando una multiplicación de probabilidades así:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

o

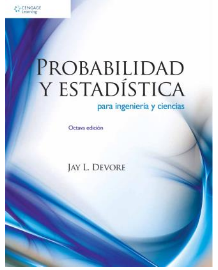
$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$$

Regla de la multiplicación general

Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ eventos no nulos definidos en S.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Ejemplo 2.29 tomado de Devore (2012)

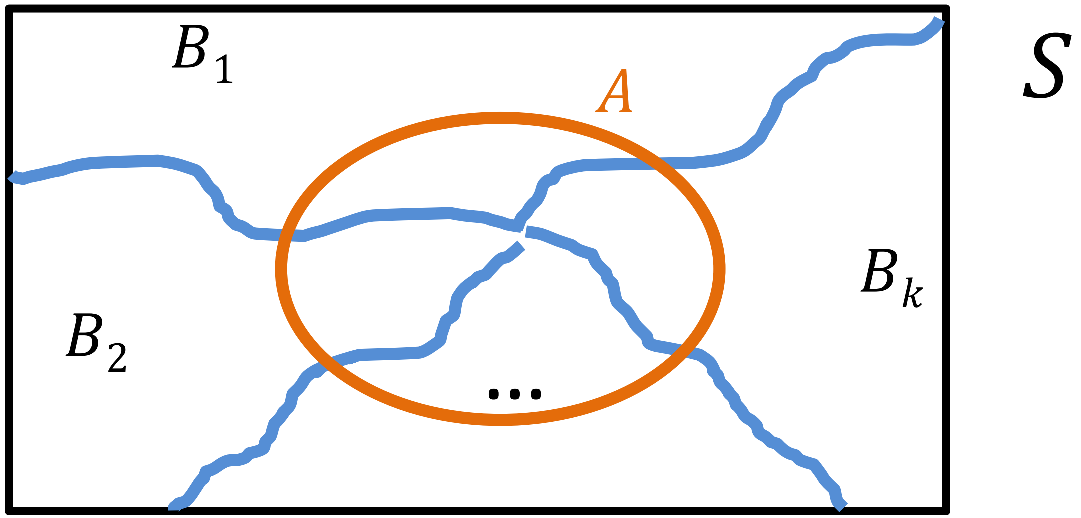


Una cadena de tiendas de video vende tres marcas diferentes de reproductores de DVD. De sus ventas de reproductores de DVD, 50% son de la marca 1 (la menos cara), 30% son de la marca 2 y 20% son de la marca 3. Cada fabricante ofrece 1 año de garantía en las partes y mano de obra. Se sabe que 25% de los reproductores de DVD de la marca 1 requieren trabajo de reparación dentro del periodo de garantía, mientras que los porcentajes correspondientes de las marcas 2 y 3 son 20% y 10%, respectivamente.

¿Cuál es la probabilidad de que un comprador seleccionado al azar haya adquirido un reproductor de DVD marca 1 que necesitará reparación mientras se encuentra dentro de la garantía?

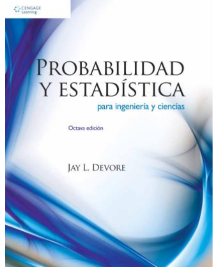
Regla de probabilidad total

Si $B_1, B_2, \dots, B_k$ son eventos que constituyen una partición de S $(B_i \cap B_j = \emptyset \ \wedge \ \bigcup_{i=1}^{k} B_i = S)$ de S y A es otro evento en S, entonces



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k)$$

Ejemplo 2.29 tomado de Devore (2012)

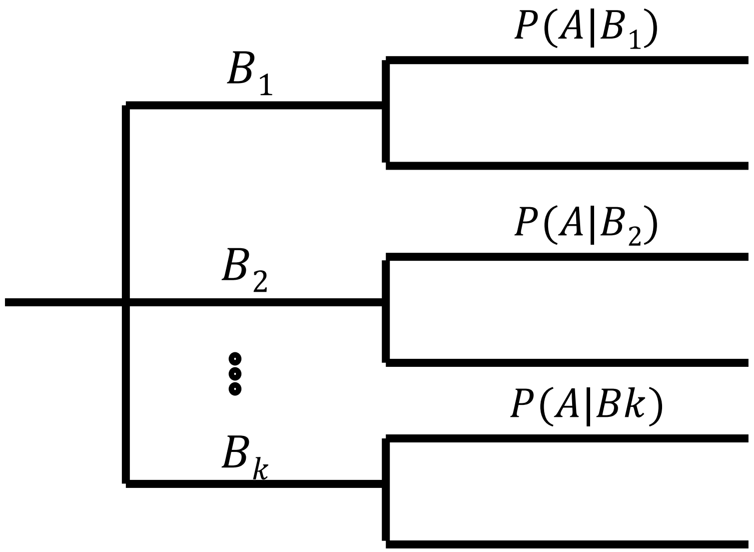


Una cadena de tiendas de video vende tres marcas diferentes de reproductores de DVD. De sus ventas de reproductores de DVD, 50% son de la marca 1 (la menos cara), 30% son de la marca 2 y 20% son de la marca 3. Cada fabricante ofrece 1 año de garantía en las partes y mano de obra. Se sabe que 25% de los reproductores de DVD de la marca 1 requieren trabajo de reparación dentro del periodo de garantía, mientras que los porcentajes correspondientes de las marcas 2 y 3 son 20% y 10%, respectivamente.

¿Cuál es la probabilidad de que un reproductor de DVD necesite reparación mientras se encuentra dentro de la garantía?

Teorema de Bayes

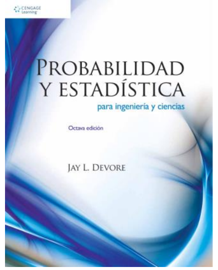
Si $B_1, B_2, \ldots, B_k$ son eventos que constituyen una partición del espacio muestral S con $P(Bi) > 0$ para $r = 1, 2, \ldots, K$, entonces para cualquier evento A en S tal que $P(A) > 0$



$$P(B_r|A) = ?$$

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{r=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)}$$

Ejemplo 2.29 tomado de Devore (2012)



Una cadena de tiendas de video vende tres marcas diferentes de reproductores de DVD. De sus ventas de reproductores de DVD, 50% son de la marca 1 (la menos cara), 30% son de la marca 2 y 20% son de la marca 3. Cada fabricante ofrece 1 año de garantía en las partes y mano de obra. Se sabe que 25% de los reproductores de DVD de la marca 1 requieren trabajo de reparación dentro del periodo de garantía, mientras que los porcentajes correspondientes de las marcas 2 y 3 son 20% y 10%, respectivamente.

Tenemos en nuestras manos un reproductor que necesita reparación pero no tiene la etiqueta de marca. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca 1?

Independencia de eventos

Definición:

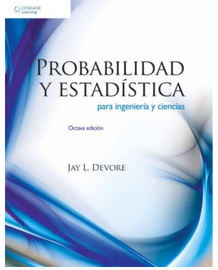
Dos eventos A y B son independientes si $P(A \mid B) = P(A)$.

Proposición:

Dos eventos A y B son independientes si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejercicio 2.63 tomado de Devore (2012)



63. Para los clientes que compran un refrigerador en una tienda de aparatos domésticos, sea A el evento en que el refrigerador fue fabricado en EU, B el evento en que el refrigerador contaba con una máquina de hacer hielos y C el evento en que el cliente adquirió una garantía ampliada. Las probabilidades pertinentes son

$$P(A) = .75 \quad P(B|A) = .9 \quad P(B|A') = .8$$

$$P(C|A \cap B) = .8 \quad P(C|A \cap B') = .6$$

$$P(C|A' \cap B) = .7 \quad P(C|A' \cap B') = .3$$

Construya un árbol de probabilidades de tres generaciones y ubique las probabilidades. ¿Serán A y B independientes?

Tarea

Replicar los ejemplos y hacer los ejercicios propuestos del texto guía.